

Per il sistema del II ordine con polo doppio reale negativo, la cui f.d.t. risulta

$$G(s) = \frac{b}{(s-p)^2}, \quad p \in \mathbb{R}^-$$

calcolare la risposta al gradino unitario,  $u(t) = 1(t)$

• Nota per una funzione razionale con un polo  $p_i$  con molteplicità  $z_i$ :

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_i)^{z_i}},$$

la scomposizione risulta

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_i)^{z_i}} &= \frac{K_{i,1}}{(s-p_i)^{z_i}} + \frac{K_{i,2}}{(s-p_i)^{z_i-1}} + \dots + \frac{K_{i,z_i}}{(s-p_i)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{z_i} \frac{K_{i,\ell}}{(s-p_i)^{z_i-\ell+1}} \end{aligned}$$

$$\text{dove } K_{i,\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{ds} (s-p_i)^{z_i} F(s) \Big|_{s=p_i}$$

• Quindi per il caso in esame

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{b}{(s-p)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_1}{s-p} + \frac{K_2}{(s-p)^2} + \frac{K_3}{s},$$

$K_1$  si ottiene da  $K_{i,\ell}$ , con  $\ell=2$  ( $z_i=2$ ),

$$K_1 = \frac{d}{ds} \left( \cancel{(s-p)^2} \frac{b}{\cancel{(s-p)^2}} \cdot \frac{1}{s} \right) \Big|_{s=p} = - \frac{b}{s^2} \Big|_{s=p} = - \frac{b}{p^2}$$

e  $K_2$  da  $K_{i,\ell}$ , con  $\ell=1$  ( $z_i=2$ ),

$$K_2 = \cancel{(s-p)^2} \cdot \frac{b}{\cancel{(s-p)^2}} \cdot \frac{1}{s} \Big|_{s=p} = \frac{b}{p}$$

In questo caso  $G(0) = G_0 = \frac{b}{p^2}$ ,  $K_3 = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = G_0 = \frac{b}{p^2}$

quindi  $K_1 = - \frac{b}{p^2} = -G_0$

e  $K_2 = \frac{b}{p} = G_0 p = - \frac{G_0}{T}$ , dove  $T = - \frac{1}{p}$

Per tanto,

$$Y(s) = \frac{b}{(s-p)^2} \cdot \frac{1}{s} = - \frac{G_0}{(s-p)} - \frac{G_0/T}{(s-p)^2} + \frac{G_0}{s}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ y(t) &= G_0 \left[ -e^{pt} - \frac{t}{T} \cdot e^{pt} + 1 \right] 1(t) = \\ &= G_0 \left[ -e^{-t/T} - \frac{t}{T} \cdot e^{-t/T} + 1 \right] 1(t) \end{aligned}$$

Nel caso di  $u(t) = U_0 1(t)$

$$y(t) = G_0 U_0 \left( e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T} + 1 \right) 1(t)$$