

Per il seguente sistema LTI

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

- studiare la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$
- calcolare l'espressione analitica dell'evoluzione libera del sistema, assumendo $a = -1$ e $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Svolgimento

- Per lo studio della stabilità bisogna determinare gli autovalori (cioè i poli) del sistema, calcolando le radici del polinomio caratteristico di A , e studiare il segno (il sistema è asintoticamente stabile (A.S.) se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa)

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -a & \lambda+1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1) - a = \lambda^2 + \lambda - a = 0$$

Per la regola di Cartesio (se i coefficienti dell'eq. caratteristica di II grado sono dello stesso segno, allora le soluzioni dell'eq. sono tutte a parte reale negativa),

$$\lambda^2 + \lambda - a = 0,$$

ammette soluzioni a parte reale negativa se $-a > 0 \Leftrightarrow a < 0$ (sistema A.S.).

$$\text{Per } a = 0, \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \quad \lambda < 0,$$

si ha un autovalore in zero ($\lambda = 0$) con molteplicità 1,

il sistema perturbato è semplicemente stabile.

Per $a > 0$, il sistema è instabile.

- calcolo dell'evoluzione libera con $a = -1$

$$x_f(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\} x_0 = \mathcal{L}\{(\lambda I - A)^{-1}\} x_0$$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1} & \frac{1}{\lambda^2+\lambda+1} \\ -\frac{1}{\lambda^2+\lambda+1} & \frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_f(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1} & \frac{1}{\lambda^2+\lambda+1} \\ -\frac{1}{\lambda^2+\lambda+1} & \frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}, \frac{1}{\lambda^2+\lambda+1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda+2}{\lambda^2+\lambda+1} \end{aligned}$$

Il denominatore di $x_f(s)$ si scrive come

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$\text{Infatti, } \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$x_f(s) = \frac{\lambda+2}{\lambda^2+\lambda+1} = \frac{\lambda + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{(\lambda + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(= \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{(\lambda + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\lambda + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \right)$$

$$x_f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \left[\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right]$$