Per il sistema LTI definito dalla seguente f.d.T.

$$G(s) = \frac{4}{s^2+s+2},$$

calcolare l'espressione analitica della risposta al gradino unitario, $u(t) = 1(t)$, e tracciarne l'andamento qualitativo

- Svolgimento

$U(s) = 1/s$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{4}{s^2+s+2} \cdot \frac{1}{s}$$

eq. caratt. $s^2+s+2 = (s+1/2)^2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$,

infatti $s^2+s+2=0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}j}{2}$

Si ricorda, nel caso di poli complessi coniugati, come in questo caso,

$$s^2+a_1 s+a_0 = (s-p)(s-\bar{p}) \quad \text{dove } p=\alpha+j\omega \text{ e } \bar{p} = \alpha - j\omega$$

$$\Rightarrow s^2+a_1 s+a_0 = (s-\alpha-j\omega)(s-\alpha+j\omega) =$$

$$= (s-\alpha)^2+\omega^2$$

In questo caso $\alpha = -1/2$ ed $\omega = \frac{\sqrt{7}}{2}$

e quindi $s^2+s+2 = (s+1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{4}{s^2+s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+2}$$

$$= \frac{A(s^2+s+2)+Bs^2+Cs}{s(s^2+s+2)} = \frac{(A+B)s^2+(A+C)s+2A}{s(s^2+s+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ A+C = 0 \\ A+B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A = 2 = G_0 \\ B = -2 \\ C = -2 \end{array}$$

Si ricorda che $A = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{G(s)}{\cancel{s}} = G(0) = G_0 = 2$

Pertanto,

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+2} = G_0\Big(\underbrace{\frac{1}{s}}_{Y_1(s)} - \underbrace{\frac{s+1}{s^2+s+2}}_{Y_2(s)}\Big)$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1(t)$$

$$Y_2(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2} = \frac{s+1}{(s+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{s+1/2\ +1/2}{(s+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y_2(t) = \left[e^{-1/2 t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-1/2 t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right]1(t)$$

Quindi $y(t) = G_0\left[y_1(t) - y_2(t)\right] =$

$$= 2\left[1 - e^{-1/2 t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)\right]1(t)$$

- Andamento qualitativo di tale risposta.
  - Calcolo dei parametri

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{G(s)}{\cancel{s}} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s\,G(s) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^3 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s) = 4$$

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{G(s)}{\cancel{s}} = G(0) = G_0 = 2$$

Poli complessi $\Rightarrow$ calcolo ζ ed ω_n

Si ricorda che il denominatore di $G(s)$ può essere riscritto in termini di ζ ed ω_n come

$$s^2+a_1 s+a_0 = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{a_0} \\ \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \end{cases}$$

In questo caso

$$s^2+s+2 = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{2} \\ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0.35 \end{cases}$$

Pertanto,

sovraelongazione (overshoot), $s = e^{-\pi \zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 0.3$

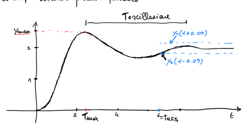
$y_{max} = G_0(1+s) = 2\cdot(1.3) = 2.6$

$T_{max} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 2.4$ sec

$T_{oscill.} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.8$ sec

$t_{a5\%} = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 6$ sec

Si nota che $t_{a5\%} = 3\tau$ dove $\tau = -\frac{1}{\alpha} = 2$ sec, costante di tempo del modo pseudo-periodico



- Nel caso la fdt abbia uno zero nell'origine, ovvero

$$G^*(s) = \frac{4s}{s^2+s+2}$$

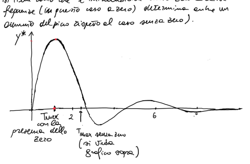
Valgono i parametri calcolati in precedenza per ζ ed ω_n per il calcolo della risposta al gradino (denotata con $y^*(t)$)

Si nota che in questo caso l'introduzione dello zero determina $\dot{y}^*(0) \neq 0$.

Infatti, $\dot{y}^*(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s\,G(s) = 4$

Inoltre $G^*(0) = 0$, quindi $y^*_\infty = 0$.

Infine, T_{max} è spostato a sx rispetto al caso senza zero (il valore di picco non viene calcolato, si tiene conto che l'introduzione dello zero a basse frequenze (in questo caso a zero) determina anche un aumento del picco rispetto al caso senza zero).



Per quanto riguarda l'espressione analitica di y^*, a partire dalla sua trasformata,

$$Y^*(s) = G^*(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{4\cancel{s}}{s^2+s+2}\cdot\frac{1}{\cancel{s}},$$

$$Y^*(s) = \frac{4}{s^2+s+2} = \frac{4}{(s+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 4\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\,\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s+1/2)^2+(\sqrt{7}/2)^2},$$

antitrasformando si ottiene

$$y^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s+1/2)^2+(\sqrt{7}/2)^2}\right) = \frac{8}{\sqrt{7}}e^{-1/2 t}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$