APPUNTI di PROBABILITÀ
VARIABILI ALEATORIE ELEMENTARI

In probabilità, un esperimento aleatorio si dice *bernoulliano* se ha solo due possibili esiti: successo o insuccesso. Ad esempio, il lancio di una moneta costituisce un esperimento aleatorio (in cui il successo può essere, ad esempio, l'uscita di testa). Anche il lancio di un dado a sei facce può essere visto come un esperimento bernoulliano se, ad esempio, interpretiamo come successo l'uscita del 6, e come insuccesso qualunque altro esito.

Nel seguito, chiameremo *parametro di un esperimento Bernoulliano* il numero p (compreso fra 0 e 1) che esprime la probabilità di successo. Il lancio di una moneta è dunque un esperimento bernoulliano di parametro 1/2, mentre il lancio di un dado a sei facce dell'esempio precedente costituisce un esperimento bernoulliano di parametro 1/6.

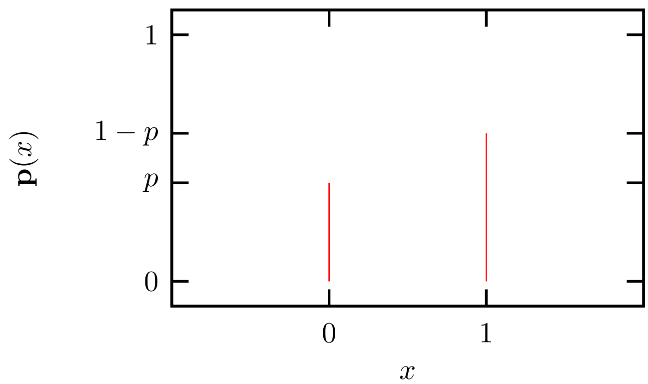
Esempi di variabili aleatorie discrete

Variabile bernoulliana $\mathrm{Bern}(p)$**.** Dato un esperimento bernoulliano di parametro p, la variabile aleatoria bernoulliana associata (che indicheremo nel seguito con $\mathrm{Bern}(p)$) è la variabile che vale 1 se l'esito dell'esperimento è successo, 0 se è insuccesso.

Si tratta chiaramente di una variabile discreta che può prendere un numero finito di valori (0 o 1) e che possiamo descrivere completamente mediante la sua *funzione di probabilità*

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1, \\ 1-p & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{1}$$

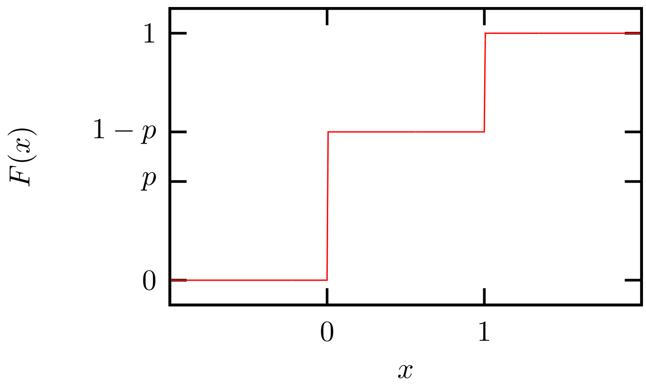
che vediamo rappresentata graficamente:



La sua *distribuzione di probabilità* è invece data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1-p & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \tag{2}$$

che graficamente risulta:



Esercizio 1. Verificare che il valore atteso e la varianza della variabile bernoulliana sono dati rispettivamente da $\mathrm{E}\,[\mathrm{Bern}(p)] = p$ e $\mathrm{Var}\,[\mathrm{Bern}(p)] = p(1-p)$.

Esercizio 2. Ripetiamo 3 volte un esperimento bernoulliano di parametro $p = 2/5$, in modo che ogni nuovo esperimento sia indipendente dai risultati precedenti. Qual è la probabilità che si verifichino

2.a) due insuccessi nei primi due tentativi e poi un successo,
2.b) esattamente due insuccessi,
2.c) esattamente 2 successi,
2.d) almeno 2 successi,
2.e) non più di 2 successi,

Variabile binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$**.** Immaginiamo ora di ripetere n volte un esperimento bernoulliano -di parametro p- in modo indipendente e di contare quanti successi otteniamo. La variabile binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$ fa proprio questo, dunque essa vale 2 se abbiamo avuto esattamente 2 successi e $n-2$ insuccessi. Più in generale, si tratta di una variabile discreta che può assumere come valore ogni numero intero compreso fra 0 e n.

A titolo esemplificativo, immaginiamo di ripetere 5 volte un esperimento bernoulliano e calcoliamo la probabilità di avere esattamente due successi (cioè la probabilità che la variabile $\mathrm{Bin}(5,p)$ valga 2). L'evento "due successi su cinque esperimenti" si può decomporre nell'unione di eventi elementari, a due a due disgiunti. Se indichiamo con la lettera S il successo e con la I l'insuccesso, tali eventi si possono schematizzare con la combinazione $\{S,S,I,I,I\}$ e con tutte le sue permutazioni; in totale si hanno $\frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2}$ eventi elementari[1]. Ognuno di tali eventi corrisponde a due successi (di probabilità p) e tre insuccessi (di probabilità $1-p$) che si verificano in esperimenti indipendenti, ed ha pertanto probabilità $p^2(1-p)^3$. Infine, la probabilità dell'evento "due successi su cinque esperimenti" si ottiene come somma delle probabilità di ognuno di questi eventi elementari, ed è dunque data da $\frac{5!}{2!\,3!}p^2(1-p)^3$.
Alla luce di questo esempio numerico, è facile convincersi che la relativa *funzione di probabilità* è

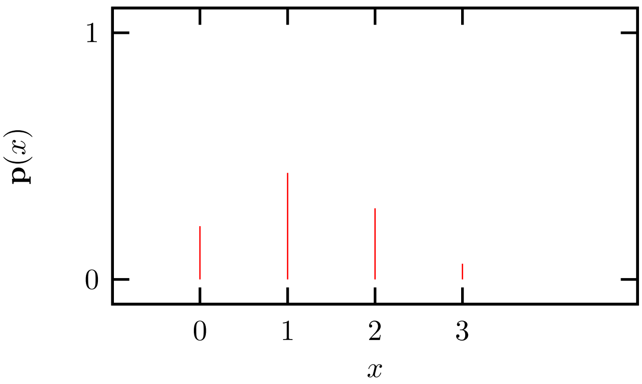
$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } x = k \text{ è un intero fra } 0 \text{ e } n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^n & \text{se } x = 0, \\ n\,p\,(1-p)^{n-1} & \text{se } x = 1, \\ \cdots & \cdots \\ p^n & \text{se } x = n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{3}$$

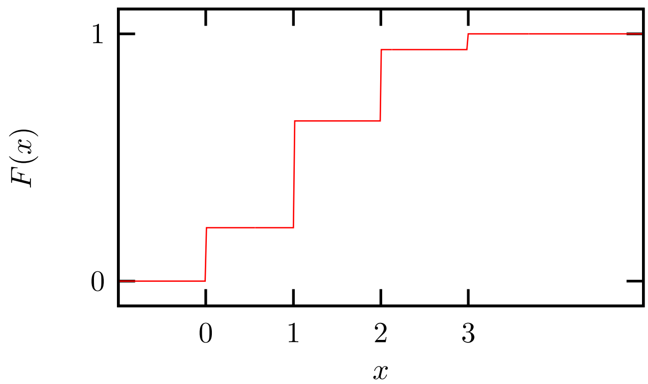
[1]tanti quanti gli anagrammi della "parola" *SSIII*

mentre la *distribuzione di probabilità* è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } i \le x < i+1, \\ & i \text{ intero fra } 0 \text{ e } n-1, \\ 1 & \text{se } x \ge n. \end{cases} \tag{4}$$

Riportiamo di seguito i grafici di funzione di probabilità e distribuzione di probabilità per la binomiale con $n = 3$ e $p = 2/5$:





Esercizio 3. Verificare che la funzione $\mathbf{p}(x)$ data dalla formula (3) è effettivamente una funzione di probabilità.

La variabile binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$ altro non è che la somma di n variabili bernoulliane indipendenti $\mathrm{Bern}(p)$, una per ogni esperimento. Pertanto applicando le proprietà del valore atteso e della varianza otteniamo che $\mathrm{E}\left[\mathrm{Bin}(n,p)\right] = np$ e $\mathrm{Var}\left[\mathrm{Bin}(n,p)\right] = np(1-p)$.

Variabile geometrica $\mathrm{Geom}(p)$**.** Immaginiamo ora di ripetere (in modo indipendente) un esperimento bernoulliano di parametro p fino a che non otteniamo un successo. La variabile geometrica conta il numero di insuccessi prima del primo successo; essa può dunque assumere il valore 0 (successo al primo tentativo), 1 (insuccesso al primo tentativo e successo al secondo), 2, e così via: si tratta cioè di una variabile discreta che può assumere infiniti valori.

A titolo esemplificativo, calcoliamo la probabilità di avere successo esattamente al terzo tentativo (cioè la probabilità che la variabile $\mathrm{Geom}(p)$ valga 2). Tale evento corrisponde a due insuccessi (di probabilità $1-p$) nelle prime due prove e un successo (di probabilità p) nella terza prova ed ha pertanto probabilità $(1-p)^2 p$.
Generalizzando quest'esempio numerico, si calcola la *funzione di probabilità* della variabile

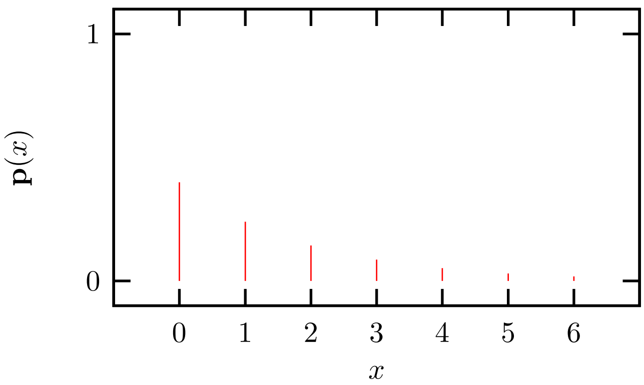
geometrica

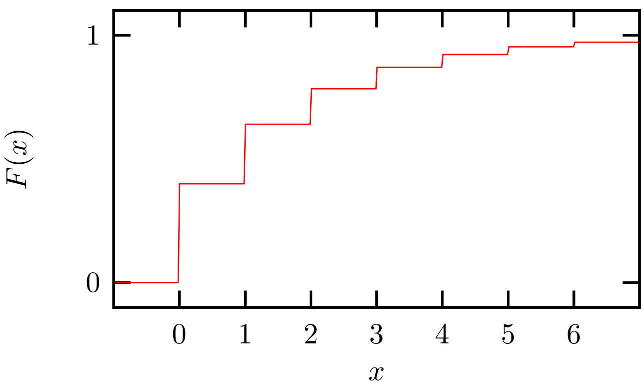
$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} (1-p)^k p & \text{se } x = k \text{ è un intero} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{5}$$

e di conseguenza la *distribuzione di probabilità* della variabile geometrica

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ p \sum_{k=0}^{n} (1-p)^k = p\,(1 + (1-p) + \cdots + (1-p)^n) & \text{se } n \le x < n+1 \end{cases} \tag{6}$$

e $n = 0, 1, \cdots$ è un qualunque numero intero. Graficamente abbiamo





Esercizio 4. Verificare che la funzione $F(x)$ data dalla formula (6) è effettivamente una distribuzione di probabilità.

Calcoliamo il valore atteso della variabile geometrica. Dalla definizione abbiamo

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{p}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k.$$

Ma per ogni k fissato si ha $k = (k-1) + 1$ e dunque

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = p\sum_{k=1}^{\infty}((k-1)+1)(1-p)^k = p\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,(1-p)^k + p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k.$$

D'altronde

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k - 1 = \frac{1}{1-(1-p)} - 1 = \frac{1}{p} - 1,$$

dove abbiamo calcolato la serie geometrica di ragione $1-p<1$. Quindi si ha

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = p\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,(1-p)^k + p\left(\frac{1}{p}-1\right) = p\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,(1-p)^k + 1-p.$$

Ora, però, per ogni k fissato si ha $(1-p)^k = (1-p)^{k-1}(1-p)$ e dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] =& p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,(1-p)^{k-1} + 1-p = p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}k\,(1-p)^k + 1-p\\ =&(1-p)\,\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] + 1-p,\end{aligned}$$

dopo aver riconosciuto che $p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{p}(k) = \mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right]$.
Raccogliendo ora a primo membro tutti i termini contenenti $\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right]$ si ottiene

$$p\,\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = 1-p,$$

e infine

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = \frac{1-p}{p}.$$

Esercizio 5. Verificare che la varianza della variabile geometrica è $\mathrm{Var}\left[\mathrm{Geom}(p)\right] = (1-p)/p^2$.

Esempi di variabili aleatorie continue

Variabile uniforme $\mathrm{U}(a,b)$. Si vuole assegnare una variabile aleatoria che assume tutti i valori compresi in un dato intervallo $[a,b]$, con densità costante,

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{c} & \text{se } x\in[a,b],\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Dovremo innanzitutto determinare per quale valore della costante c la funzione $f(x)$ appena introdotta è effettivamente una *densità di probabilità.* Imponiamo allora la proprietà fondamentale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

da cui si ricava

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} \mathrm{c}\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}\,[x]_b^a = \mathrm{c}(b-a) = 1$$

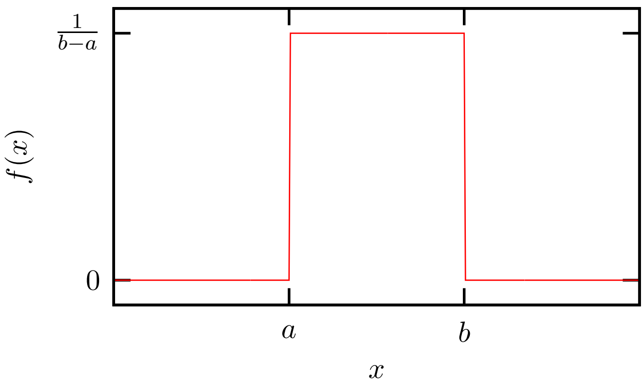
e infine $\mathrm{c} = \frac{1}{b-a}$.
Concludendo, la variabile aleatoria uniforme $\mathrm{U}(a,b)$ si assegna mediante la sua *densità di probabilità*

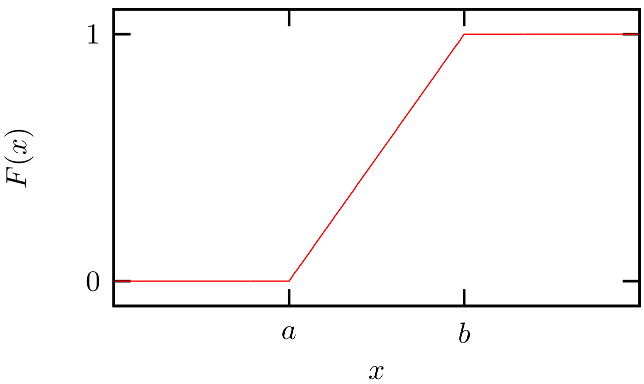
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } x\in[a,b],\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases} \tag{7}$$

da cui si ricava la *distribuzione di probabilità*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{se } x\le a\\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a} & \text{se } x\in(a,b),\\ 1 & \text{se } x\ge b.\end{cases} \tag{8}$$

Graficamente abbiamo





Ricaviamo poi che il suo valore atteso è

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{U}(a,b)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

mentre la varianza è

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\mathrm{U}(a,b)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b = \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{3(b-a)} = \frac{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

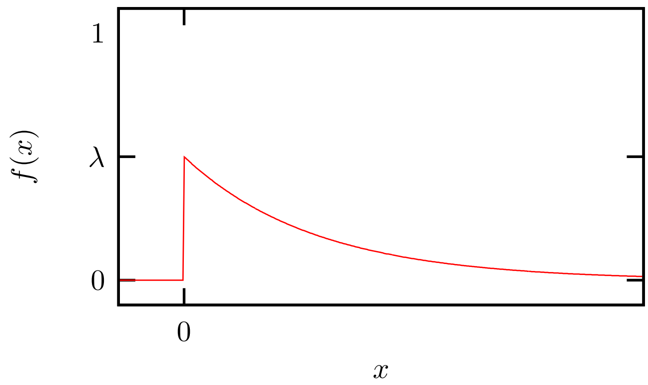
Variabile esponenziale $\mathrm{Exp}(\lambda)$**.** Questa variabile è spesso usata nelle applicazioni per rappresentare un tempo di attesa. Essa infatti può assumere qualunque valore positivo, e preferibilmente assume valori prossimi alllo zero. La si assegna a partire dalla *densità di probabilità*

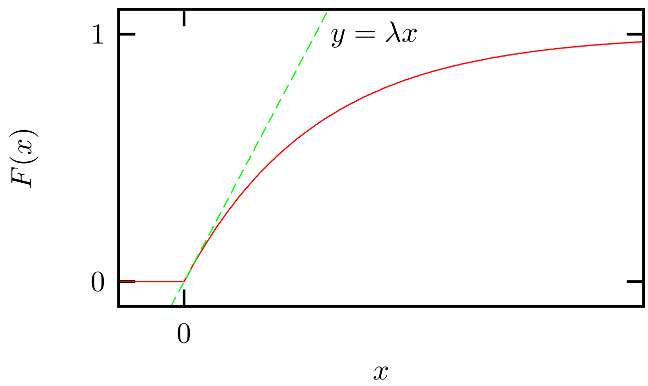
$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases} \tag{9}$$

da cui si ricava la *distribuzione di probabilità*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \displaystyle\int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1-e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0.\end{cases} \tag{10}$$

Graficamente abbiamo





Esercizio 6. Verificare che la funzione $F(x)$ data dalla formula (10) è effettivamente una distribuzione di probabilità.

Verifichiamo che la variabile esponenziale ha valor medio finito: dalle definizioni si ha

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Exp}(\lambda)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\kappa\to\infty}\int_0^{\kappa} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per ogni κ fissato, possiamo integrare per parti ottenendo

$$\int_0^{\kappa} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\kappa} + \int_0^{\kappa} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\kappa} = -\left(\kappa + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\kappa} + \frac{1}{\lambda}$$

e poi, passando al limite

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Exp}(\lambda)\right] = \lim_{\kappa\to\infty}\left(-\left(\kappa+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\kappa} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Esercizio 7. Verificare che la varianza della variabile aleatoria esponenziale è finita e si ha $\mathrm{Var}\left[\mathrm{Exp}(\lambda)\right] = 1/\lambda^2$.

Variabile normale o gaussiana $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$**.** La variabile gaussiana è l'esempio più importante di variabile aleatoria con distribuzione continua. Se μ e σ sono due qualunque numeri reali, con $\sigma > 0$, la corrispondente variabile gaussiana si assegna a partire dalla *densità di proabilità*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \tag{11}$$

da cui si ricava la *distribuzione di Gauss*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{12}$$

Osservazione. La f assegnata da (11) ha le proprietà fondamentali della densità, in particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

anche se la verifica di detta proprietà richiede strumenti che noi, allo stato attuale, non possediamo. Ne ricaviamo un'informazione che ci sarà utile in futuro, precisamente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

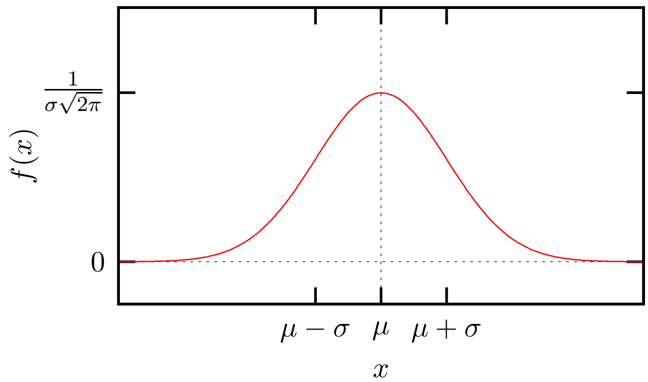
In particolare, per $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si ricava

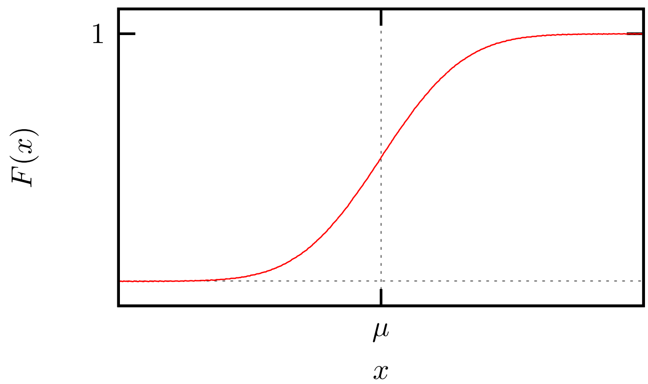
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Infine, sfruttando l'informazione che la fuzione integranda è pari, si ottiene

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{13}$$

Graficamente abbiamo





Si noti che la densità è simmetrica rispetto a μ, è crescente a sinistra di μ, ha un massimo in μ e poi è decrescente a destra di μ; infine, calcolando la derivata seconda si vede che la densità ha due flessi nei punti $\nu \pm \sigma$.

Per i valori $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si ottiene quella che si chiama la *distribuzione normale standard* $\mathrm{N}(0, 1)$. Ogni altra distribuzione normale può essere ricostruita da questa mediante la regola che segue.

Proposizione 1. *Siano* $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ *con* $\sigma > 0$. *Se* X *è la variabile aleatoria* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, *allora la variabile aleatoria*

$$Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu) \tag{14}$$

è distribuita secondo la distribuzione normale standard $\mathrm{N}(0, 1)$.

Viceversa, se Y è la variabile aleatoria distribuita $\mathrm{N}(0,1)$*, allora la variabile*

$$X = \mu + \sigma Y \tag{15}$$

è distribuita $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$*.*

Calcoliamo ora il valore atteso e la varianza della variabile normale $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

PROPOSIZIONE 2. *Siano $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ con $\sigma > 0$. Se X è la variabile aleatoria* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$*, allora*

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\right] = \mu, \qquad \mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\right] = \sigma^2.$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù della (15), ci è sufficiente calcolare il valore atteso della variabile normale standard $\mathrm{N}(0,1)$ e poi ricavare

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\right] = \mu + \sigma\, \mathrm{E}\left[\mathrm{N}(0,1)\right], \qquad \mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\right] = \sigma^2\, \mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(0,1)\right]. \tag{16}$$

Controlliamo ora dapprima che la variabile normale standard abbia media finita, ovvero che la funzione

$$x f(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

sia sommabile su $\mathbb{R}$. Ciò discende dal **criterio degli infinitesimi**, poiché $|xf(x)|$ è un infinitesimo di ordine superiore a qualunque funzione del tipo $1/|x|^p$ per $x \to \pm\infty$. Abbiamo ora che

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{N}(0,1)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

poiché la funzione integranda è dispari.[2] Applicando ora la (16) otteniamo

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\right] = \mu.$$

Per ciò che riguarda la varianza della variabile normale standard, anche essa sarà finita per il **criterio degli infinitesimi**, poiché $|x^2 f(x)|$ è un infinitesimo di ordine superiore a qualunque funzione del tipo $1/|x|^p$ per $x \to \pm\infty$. Abbiamo ora che

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(0,1)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

poiché la funzione integranda è pari.[3] Inoltre

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(0,1)\right] = 2 \lim_{\kappa\to\infty} \int_0^{\kappa} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\kappa\to\infty} \int_0^{\kappa} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per κ fissato, integriamo per parti la funzione

$$x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x\left(x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

---

[2]Si ha infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

dove, applicando la sostituzione $t = -x$ ($dt = -dx$) nel primo integrale, si ricava

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{0} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

[3]Si ha infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

dove, applicando la sostituzione $t = -x$ ($dt = -dx$) nel primo integrale, si ricava

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int_{+\infty}^{0} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

sì da ottenere

$$\int_0^{\kappa} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\kappa} + \int_0^{\kappa} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sostituendo nell'identità precedente abbiamo

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(0,1)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\kappa\to\infty}\left(\left[-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\kappa} + \int_0^{\kappa} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$$

grazie all'identità (13). Applicando ora la (16) otteniamo

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\right] = \sigma^2.$$

□