

ESERCITAZIONE di PROBABILITÀ: variabili aleatorie

ESERCIZIO 1. Si consideri l'esperimento aleatorio "pesca di una carta da un mazzo di carte francesi" e si determinino la funzione di probabilità, la distribuzione di probabilità, il valore atteso e la varianza delle seguenti variabili aleatorie discrete:

X_1 è il numero della carta pescata (considerando J=11, Q=12, K=13),

X_2 è 1 se la carta pescata è di cuori, 2 se è di fiori, 3 se è di quadri, 4 se è di picche,

X_3 è 0 se la carta pescata è una figura, -1 se è un numero dispari, 1 se è un numero pari.

ESERCIZIO 2. Un giocatore lancia un dado ripetutamente fino a quando non esce un numero maggiore o uguale a 5; sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero X di lanci effettuati. Utilizzando l'indipendenza di eventi ed eventualmente le variabili aleatorie note, si determinino la distribuzione di probabilità di X e la probabilità che risulti $X \leq 4$.

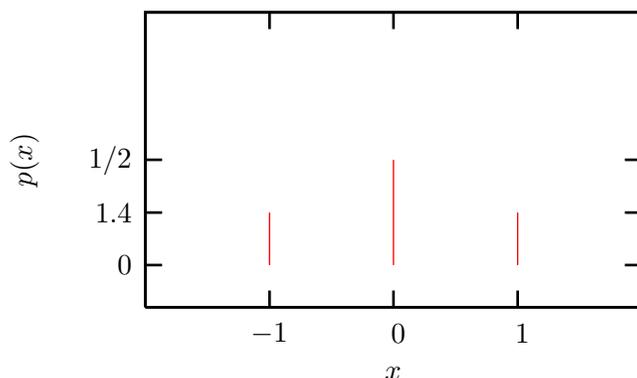
ESERCIZIO 3. È data un'urna contenente 5 biglie rosse, 3 nere e 2 bianche. Siano X e Y le variabili che contano il numero di biglie rosse estratte facendo 3 estrazioni consecutive, rispettivamente con e senza reintegro. Si rappresentino le relative distribuzioni e si calcolino valore atteso e varianza.

ESERCIZIO 4. È data un'urna contenente 3 gettoni numerati (da 1 a 3). Si estragga casualmente un gettone e si indichi con X la variabile aleatoria che esprime il risultato dell'estrazione. Calcolare il valor atteso e la varianza di X .

Si effettuino poi due estrazioni consecutive (senza reintegro), e sia Y la variabile aleatoria che calcola la somma dei risultati ottenuti. Calcolare il valor atteso e la varianza di Y .

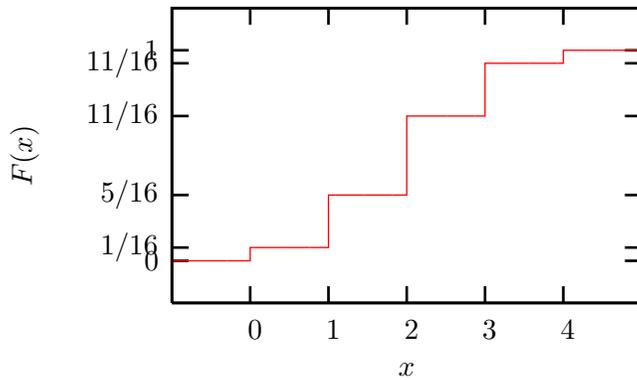
ESERCIZIO 5. Rispondere alle domande:

5.a) Verificare che la funzione $p(x)$:



è la funzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta, che indicheremo con X_a . Rappresentare graficamente la sua distribuzione di probabilità $F(x)$; calcolare poi $P\{X_a \leq 3\}$, $P\{0 < X_a \leq 1\}$, $P\{0 \leq X_a \leq 1\}$, $P\{X_a < 0\}$, il valor medio e la varianza di X_a .

5.b) Sia X_b la variabile aleatoria con la seguente distribuzione di probabilità $F(x)$:

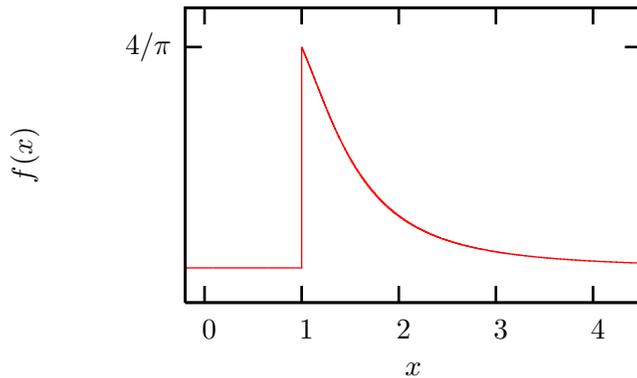


Calcolare $P\{X_b \leq 3\}$, $P\{0 < X_b \leq 1\}$, $P\{0 \leq X_b \leq 1\}$, $P\{X_b < 0\}$. Scrivere poi e rappresentare graficamente la sua funzione di probabilità $p(x)$ e calcolare il valor medio e la varianza di X_b .

- 5.c) Verificare che la funzione $p(x) = \begin{cases} 2/3^{n+1} & \text{se } x = 2n, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

è la funzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta (infinita), che indicheremo con X_c . Calcolare poi $P\{X_c \leq 5\}$, $P\{0 < X_c \leq 6\}$ e $P\{0 \leq X_c \leq 1\}$.

- 5.d) Verificare che la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{8x}{\pi(1+x^4)} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$



è la densità di probabilità di una variabile aleatoria, che indicheremo con X_d . Calcolare poi $P\{X_d \leq 3\}$, $P\{2 < X_d \leq 4\}$, $P\{2 \leq X_d \leq 4\}$, $P\{X_d > 0\}$, il valor medio e la varianza di X_d .

- 5.e) Verificare che la funzione $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ (1+x^3)/9 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ è la distribuzione

di una variabile aleatoria, che indicheremo con X_e . Calcolare poi $P\{X_e \leq 1\}$, $P\{-1 < X_e < 1\}$, $P\{X_e \geq 0\}$, il valor medio e la varianza di X_e .

$$6.1) \quad f_1(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$6.2) \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} & \text{se } x \geq 1/(e-1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$6.3) \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Per ognuna di esse, dopo aver verificato che rappresentano la densità di una variabile aleatoria, determinare la distribuzione relativa e calcolare la probabilità che

- a) X sia compresa fra 2 e 10,
- b) X sia minore o uguale a 3,
- c) X sia maggiore di 1,
- d) X sia negativa.

Determinare infine se le suddette variabili aleatorie hanno media e/o varianza finite e, se possibile, calcolarle.