CAPITOLO 1

Calcolo combinatorio

Immaginiamo di avere una collezione finita di oggetti (cioè un insieme finito) e di sceglierne o estrarne a sorte alcuni, cioè di costruire un nuovo insieme raggruppando alcuni degli elementi dati. In primo luogo, dovremo fissare le regole del gioco:

- quali e quanti oggetti abbiamo a disposizione? (inquadriamo il problema nell'ambito di uno o più insiemi matematici)
- quali e quanti oggetti scegliamo? (da quanti elementi sarà costituita la nostra collezione?)
- l'ordinamento è importante? (due collezioni che contengono gli stessi oggetti in diverso ordine sono uguali o diverse?)
- si può usare ripetutamente lo stesso oggetto? (la nostra collezione sarà fatta di elementi distinti o si possono avere più ripetizioni di uno stesso oggetto?)

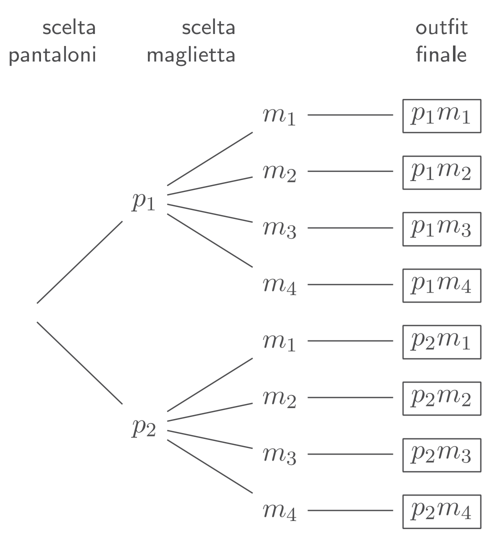
Fatto ciò, possiamo chiederci quanti sono i possibili risultati della nostra scelta, cioè in quanti modi possiamo raggruppare e/o ordinare gli oggetti assegnati. Il **calcolo combinatorio** si occupa di contare tali modi, ovvero le configurazioni, e solitamente risponde a domande quali "Quanti sono...", "In quanti modi...", "Quante possibili combinazioni..." eccetera.

Per poter entrare nel dettaglio della discussione, dobbiamo dare alcune (troppe) definizioni, che illustriamo via via con degli esempi.

1. Raggruppamenti

Se ho due pantaloni e quattro magliette, in quanti modi mi posso vestire? Il mio outfit è un *raggruppamento* in cui posso scegliere un oggetto nell'insieme "pantaloni" e uno nell'insieme "magliette".

Per rispondere alla domanda, costruiamo un diagramma ad albero in cui indichiamo i pantaloni con le lettere p_1, p_2 e le magliette con m_1, m_2, m_3, m_4.



Possiamo scegliere i pantaloni in due modi diversi.
Per ogni scelta di pantaloni, possiamo poi scegliere la maglietta in 4 modi diversi.
In totale abbiamo quindi $2 \cdot 4 = 8$ possibili outfit, come si vede anche contando le foglie dell'albero (steso).

Si può anche inquadrare la questione in modo insiemistico. Indichiamo con $P \coloneqq \{p_1, p_2\}$ l'insieme dei pantaloni e con $M \coloneqq \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ quello delle magliette. Un outfit è una coppia costituita da un elemento di P e uno di M, ovvero un elemento del prodotto cartesiano $P \times M = \{(x, y) : x \in P,\ y \in M\}$, quindi i possibili outfit sono tanti quanti gli elementi del prodotto cartesiano. D'altra parte, in teoria degli insiemi vale il seguente Teorema

TEOREMA 1.1 (Cardinalità dell'insieme prodotto). *Se A e B sono due insiemi finiti, costituiti rispettivamente da n ed m elementi, allora il loro prodotto cartesiano $A \times B$ è formato esattamente da $n \cdot m$ elementi.*
Analogamente, se $A_1, A_2, A_3 \dots A_k$ sono k insiemi finiti, formati rispettivamente da $n_1, n_2, n_3 \dots n_k$ elementi, allora il loro prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots A_k$ è formato esattamente da $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ elementi.

In definitiva, possiamo rispondere alla domanda iniziale anche contando il numero degli elementi dell'insieme prodotto $P \times M$. Poiché P ha 2 elementi ed M ne ha 4, rispondiamo che mi posso vestire in $2 \cdot 4 = 8$ modi diversi.

Diamo una definizione generale di raggruppamento e una formula per calcolare il numero di tutti i possibili raggruppamenti.

Definizione 1.1: Raggruppamento

Sia k un numero naturale e siano $A_1, A_2, A_3 \dots A_k$ degli insiemi non vuoti. Un raggruppamento di k elementi è una collezione di k oggetti scelti rispettivamente in $A_1, A_2, \dots A_k$.

Sottolineamo che due raggruppamenti si considerano *diversi* se almeno uno degli oggetti che li compongono differisce. Nell'esempio ininziale, due outfit formati dallo stesso pantalone combinato con magliette differenti sono considerati diversi.

L'applicazione del Teorema 1.1 al calcolo combinatorio fornisce il seguente

Teorema 1.2: Principio di moltiplicazione delle scelte

Sia k un numero naturale e siano $A_1, A_2, A_3 \dots A_k$ degli insiemi finiti, non vuoti. Per contare in quanti modi posso raggruppare un oggetto di A_1, uno di A_2 e così via fino ad A_k bisogna moltiplicare il numero di elementi di A_1 per quello di A_2 e così via fino ad A_k.

Il Teorema 1.2 è anche noto come Teorema fondamentale del calcolo combinatorio.

Esercizio 1.1:

In mensa offrono 3 scelte per il primo, 2 per il secondo e 4 per il contorno. Quanti pasti completi si possono comporre?

Svolgimento. Bisogna contare tutti i raggruppamenti formati da un primo piatto, un secondo e un contorno, che in base al Teorema 1.2 sono $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$. □

Esercizio 1.2:

Se termina un secondo, come cambia il numero dei pasti completi che si possono scegliere?

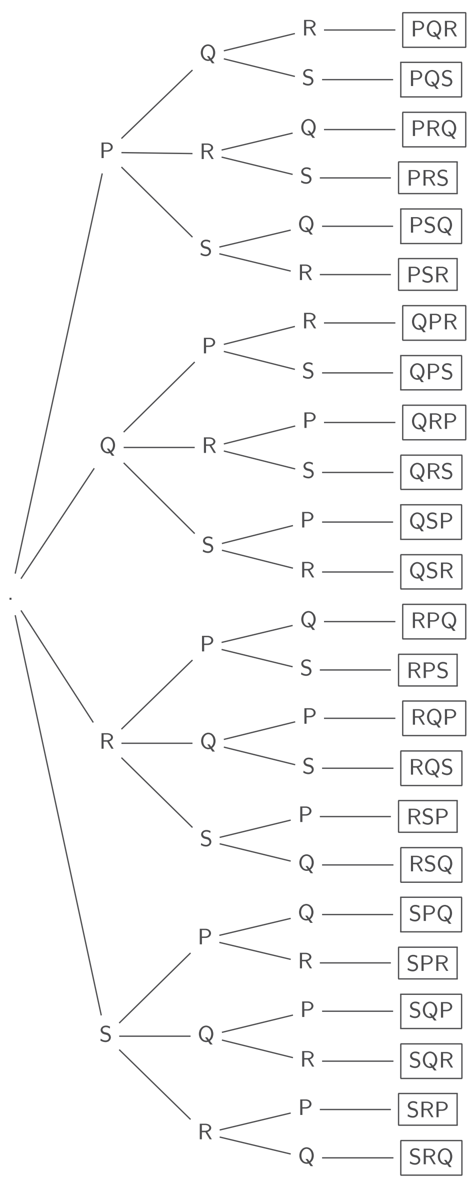
Esercizio 1.3:

a) *In una compagnia di 8 ragazze e 11 ragazzi, quante coppie formate da un ragazzo e una ragazza si possono formare?*
b) *Ho 5 biglie nere numerate da 1 a 5 e 3 biglie bianche numerate da 1 a 3. Quante coppie formate da una biglia nera e una bianca si possono avere?*
Quante di queste coppie contengono solo numeri dispari? E quante contengono un numero pari e uno dispari?

2. Raggruppamenti ordinati di oggetti distinti

2.1. Disposizioni semplici. Ad una gara con quattro partecipanti (Paolo, Quirino, Roberto e Simone) vengono premiati i primi tre classificati. Quante sono le possibili classifiche dei premiati? Precisiamo che due terne di premiati si intendono diverse se almeno uno dei premiati è diverso, ma anche se i premiati sono gli stessi, ma l'ordine d'arrivo è diverso. La classifica dei premiati è un esempio di *disposizione semplice* di tre oggetti su quattro.

Per rispondere alla domanda, costruiamo un diagramma ad albero in cui indichiamo i partecipanti con le loro iniziali:



Procedendo da sinistra verso destra, nella prima colonna troviamo i possibili vincitori, che sono tanti quanti i partecipanti, cioè 4.
Una volta che il vincitore è noto, passando alla colonna successiva troviamo i $4-1=3$ partecipanti che possono arrivare secondi, e per il terzo classificato ne restano solo $4-2=2$.
Complessivamente, le possibili disposizioni sono quindi $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Diamo ora la definizione e la formula generale.

Definizione 2.1: Disposizione semplice

Dati n oggetti distinti, sia $k \leq n$. Una disposizione semplice di k oggetti su n è una collezione ordinata di k oggetti distinti scelti tra gli n disponibili.
La si chiama anche disposizione semplice di n elementi di classe k.
Indichiamo col simbolo $D_{n,k}$ il numero di tutte le disposizioni semplici di k oggetti su n.

Nella definizione abbiamo sottolineato per ben due volte la parola "distinti", per enfatizzare che i k oggetti che formano una disposizione semplice devono essere diversi tra loro. Nel nostro esempio, se Paolo arriva primo allora non potrà essere né secondo né terzo. É per questa caratteristica che la disposizione viene detta *semplice*.
Abbiamo anche sottolineato l'aggettivo "ordinata", a sottolineare che due disposizioni formate dagli stessi oggetti in differente ordine sono da considerarsi diverse. Nel nostro esempio, la classifica PQR (1^o Paolo, 2^o Quirino e 3^o Roberto) è diversa da PRQ (1^o Paolo, 2^o Roberto e 3^o Quirino).

Generalizzando il ragionamento, si può dimostrare la formula che segue.

Proposizione 2.2: Formula per le disposizioni semplici

Siano n e k due numeri naturali con $n \geq k > 0$. Le possibili disposizioni semplici di k elementi su n sono complessivamente $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$, in simboli

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esercizio 2.1:

a) *Quante parole di tre lettere tutte diverse tra loro possiamo formare (contando anche le "parole" che non hanno un significato)?*
b) *Quanti numeri interi di quattro cifre hanno tutte le cifre diverse tra loro?*
c) *Quanti sono i possibili podii della finale dei 100m alle Olimpiadi?*
d) *Una ditta deve assumere tre dipendenti, da collocare rispettivamente in amministrazione, in contabilità e nell'ufficio commerciale. Sapendo che sono arrivati 20 curriculum, in quanti modi diversi si può assumere?*

Esercizio 2.2: Estrazione ripetuta senza reintegro (ordinata)

Ho dieci palline numerate da 1 a 10. Ne estraggo tre, una di seguito all'altra, dando importanza all'ordine in cui le estraggo. Quanti sono gli esiti possibili della mia estrazione?

2.2. Permutazioni semplici. Abbiamo visto che per fare una disposizione semplice di k oggetti su n è necessario che k sia minore o uguale a n. Quando k coincide con n, non sto *scegliendo* gli oggetti (li prendo tutti!), piuttosto li sto *ordinando*. In questo caso particolare, parlo di *permutazione*. È questo il caso se guardo l'intero ordine di arrivo in una gara, oppure se compongo gli anagrammi di una parola. In un anagramma, infatti, devo usare tutte le lettere una volta sola.

Definizione 2.3: permutazione semplice

Dati n oggetti distinti, una loro permutazione o riordinamento è una presentazione ordinata di tutti gli n oggetti, ognuno dei quali viene preso una sola volta.
Col simbolo P_n indichiamo il numero totale delle permutazioni di n oggetti distinti.

Due permutazioni diverse differiscono solo per l'*ordine*, ma presentano gli stessi oggetti. Di fatto, $P_n = D_{n,n}$, cioè una permutazione di n oggetti è una disposizione semplice di n oggetti su n. Di conseguenza la Proposizione 2.2 fornisce anche una formula per calcolare il numero delle possibili permutazioni.

Proposizione 2.4: Formula per le permutazioni semplici

Sia n un numero naturale, $n \geq 1$. Le possibili permutazioni semplici di n oggetti sono complessivamente $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$, in simboli

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

Ricordiamo alcune immediate proprietà del fattoriale:

$$0! = 1, \qquad 1! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n!, \qquad n! = n \cdot (n-1)!$$

Esercizio 2.3

Calcolare quanti sono tutti i possibili anagrammi della parola PORTA.

Svolgimento. Se accettiamo tutti i possibili risultati (cioè non richiediamo che la parola ottenuta sia di senso compiuto nella nostra lingua), gli anagrammi della parola PORTA corrispondono alle permutazioni di 5 elementi distinti, e sono dunque $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. □

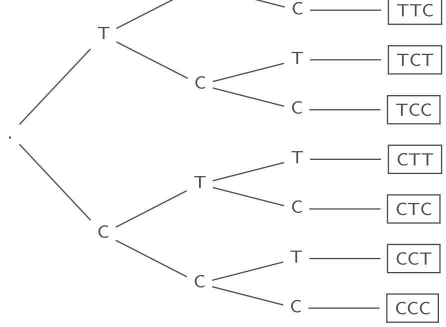
Esercizio 2.4:

Quanti sono i possibili ordini di arrivo della finale dei 100m alle Olimpiadi?
Se sappiamo quali atleti sono saliti sul podio, quanti sono i possibili ordini di arrivo dal quarto all'ottavo posto? Per rispondere a quest'ultima domanda, vi serve sapere chi ha vinto l'oro, l'argento e il bronzo?

3. Raggruppamenti ordinati con ripetizioni

3.1. Disposizioni con ripetizioni. Immaginiamo ora di lanciare una moneta per tre volte. Quanti sono i risultati che possiamo ottenere? Poiché ad ogni lancio possiamo ottenere testa oppure croce, indichiamo l'insieme dei possibili risultati di un lancio con $A \coloneqq \{T, C\}$. L'esito complessivo dopo tre lanci sarà una terna di lettere T e C: poichè ad ogni lancio i possibili risultati sono testa o croce indipendentemente da quanto successo al lancio precedente, nella successione degli esiti può comparire la stessa lettera ripetuta più volte. Inoltre consideriamo diverse due terne costituite dagli stessi esiti ottenuti in ordine diverso. Siamo di fronte ad una disposizione con ripetizioni di tre oggetti su due.

Costruiamo un diagramma ad albero:



Procedendo da sinistra verso destra, nelle prime tre colonne troviamo gli esiti di primo, secondo e terzo lancio, mentre nell'ultima colonna abbiamo elencato la successione degli esiti. Per ogni lancio, i possibili risultati sono due indipendentemente da quanto successo al lancio precedente, quindi nella successione degli esiti può comparire la stessa lettera ripetuta più volte. Poichè ci interessa anche l'ordine in cui sono usciti testa o croce, due terne che hanno le stesse lettere in ordine differente sono da considerarsi diverse.

L'insieme dei possibili esiti è descritto esattamente dal prodotto cartesiano $A \times A \times A$. A ben pensarci, stiamo proprio facendo un raggruppamento di 3 oggetti scelti in tre copie identiche dello stesso insieme A. Ne deduciamo che i possibili esiti sono complessivamente $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Definizione 3.1: Disposizione con ripetizioni

Dati n oggetti distinti, sia k un qualunque numero naturale non nullo. Una disposizione con ripetizioni di k oggetti su n (è una collezione ordinata di k oggetti scelti tra gli n disponibili. La si chiama anche disposizione con ripetizioni di n elementi di classe k.
Col simbolo $D'_{n,k}$ indichiamo il numero di tutte le disposizioni con ripetizioni di k oggetti su n.

Osserviamo che, a differenza delle disposizioni semplici, nelle disposizioni con ripetizioni il numero di elementi scelti (k) puó essere maggiore del numero di oggetti tra cui scegliamo (n). Va poi sottolineato che una disposizione è un insieme ordinato, quindi due disposizioni che contengono gli stessi oggetti in diverso ordine sono differenti.

Il Principio di moltiplicazione delle scelte Teorema 1.2 ci fornisce una formula per calcolare il numero di disposizioni possibili.

Proposizione 3.2: Formula per le disposizioni con ripetizioni

Siano n e k due numeri naturali con $n, k > 0$. Le possibili disposizioni con ripetizioni di k elementi su n sono complessivamente n^k, in formule

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Esercizio 3.1

Quanti codici di 6 cifre si possono creare utilizzando solo le cifre dispari?

Svolgimento. Le cifre a disposizione sono 5, precisamente $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Un codice è una disposizione di 6 cifre, che certamente si possono ripetere e si differenziano sia per le cifre che appaiono, sia per il loro ordine. Si tratta quindi di una disposizione (con ripetizioni) di classe 6 su 5 oggetti. Le possibili configurazioni sono dunque $D'_{5,6} = 5^6 = 15625$. □

Esercizio 3.2

Quante sono le targhe automobilistiche?

Svolgimento. Una targa automobilistica è una sequenza in cui appare una coppia di lettere, poi una terna di cifre, poi di nuovo una coppia di lettere.
Cominciamo contando quante sono le possibili configurazioni della coppia di lettere iniziali: dobbiamo prendere due lettere e ne abbiamo a disposizione 22 (le lettere O, Q, U, I non sono utilizzate per evitare errori di lettura). Poiché c'interessa l'ordine e possiamo ripetere la stessa lettera, usiamo la formula delle disposizioni non ripetizione $D'_{22,2} = 22^2 = 484$. Chiaramente la stessa cosa vale anche per la coppia finale.
Per quanto riguarda la terna di cifre, invece, le configurazioni possibili sono $D'_{10,3} = 10^3 = 1\,000$.
Infine, per comporre la targa dobbiamo creare un raggruppamento in cui scegliamo una coppia di lettere, una terna di cifre, una coppia di lettere. Il Principio di moltiplicazione delle scelte Teorema 1.2 ci dice allora che le targhe possibili sono $484 \cdot 1\,000 \cdot 484 = 234\,256\,000$. □

3.2. Permutazioni con ripetizioni. Proviamo ora a contare tutti i possibili anagrammi della parola `porto`, compresi quelli che non hanno senso compiuto. In un anagramma, dobbiamo usare tutte le lettere a disposizione (5) una e una sola volta. A differenza dell'esercizio Esercizio 2.3 (gli anagrammi di `porta`), però, non dobbiamo contare tutte le permutazioni semplici, perché ora la lettera o è ripetuta. Ciò fa si che se scambio tra loro la seconda e la quinta lettera non ottengo un nuovo anagramma, ma ripeto la parola porto. Siamo di fronte ad un esempio di permutazione con ripetizioni, e abbiamo già intuito che le possibili configurazioni sono di meno rispetto alle permutazioni semplici. Precisamente sono la metà, perché a ogni coppia di anagrammi della parola porta che differiscono solo perché le lettere o ed a appaiono invertite, corrisponde un solo anagramma della parola porto. Concludo quindi che i possibili anagrammi sono $5!/2 = 60$.

Cosa succede se anagrammo la parola poppa? Gli anagrammi di una parola di 5 lettere distinte sono $5!$, ma ora identifico tutti gli anagrammi che differiscono solo per la posizione delle 3 lettere p. Suggerimento: non basta dividere per 3. Per convincercene, indicizziamo le lettere della parola e scriviamo $\mathsf{p_1op_2p_3a}$. Ci sono $3! = 6$ permutazioni che cambiano solo le posizioni di $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2$ e p_3, precisamente

$$\mathsf{p_1op_2p_3a},\ \mathsf{p_1op_3p_2a},\ \mathsf{p_2op_1p_3a},\ \mathsf{p_2op_3p_1a},\ \mathsf{p_3op_1p_2a},\ \mathsf{p_3op_2p_1a}.$$

A questi $3!$ riordinamenti corrisponde una sola permutazione con ripetizioni. Ne deduco quindi che i possibili anagrammi sono $5!/3! = 20$.

Siamo pronti per dare una definizione ed una formula generale.

Definizione 3.3: Permutazione con ripetizioni

Dati j oggetti distinti e j numeri naturali $n_1, n_2, \dots n_j$, consideriamo l'insieme che contiene n_1 copie del primo oggetto, n_2 copie del secondo, e cosí via. Tale insieme ha $n := n_1 + n_2 + \cdots n_j$ elementi. Una permutazione con ripetizioni è una presentazione ordinata di tutti gli n oggetti dell'insieme.
Indichiamo il numero di tutte le permutazioni con ripetizioni con il simbolo $P'_{n_1,n_2,\dots n_j}$.

Alla luce dei ragionamenti precedenti possiamo affermare che

Proposizione 3.4: Formula per le permutazioni con ripetizioni

Sono dati j oggetti distinti e j numeri naturali $n_1, n_2, \dots n_j$, poniamo $n := n_1 + n_2 + \cdots n_j$. Il numero complessivo delle permutazioni di un insieme che contiene esattamente n_1 copie di un oggetto, n_2 copie di un altro e cosí via è

$$P'_{n_1,n_2,\dots n_j} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_j!}.$$

Si noti che, poiché $1! = 1$, se un oggetto non è ripetuto non dà alcun contributo al denominatore.

Esercizio 3.3

Si calcoli quanti sono tutti gli anagrammi della parola serratura.

Svolgimento. Abbiamo a disposizione complessivamente 9 lettere, di cui però la r e la a sono ripetute, rispettivamente, 3 e 2 volte. La formula precedente ci dice dunque che i possibili anagrammi sono $9!/3!2! = 30\,240$. □

4. Raggruppamenti non ordinati

4.1. Combinazioni semplici. Nelle combinazioni, a differenza delle disposizioni, non si dà importanza all'ordine in cui vengono scelti gli oggetti.

Andrea, Beatrice, Carlo, Davide ed Emma vorrebbero andare ad un concerto, ma hanno a disposizione solo tre biglietti. In quanti modi possono scegliere chi andrà al concerto? Ci interessano solo i nomi dei 3 ragazzi che avranno il biglietto, indipendentemente dall'ordine in cui li elenchiamo, pertanto stiamo operando una combinazione di 3 elementi su 5. Il gruppo composto da Andrea, Beatrice ed Emma corrisponde alla terna ABE, ma anche a tutte le sue permutazioni (o anagrammi) AEB, BAE, BEA, EAB, EBA. Abbiamo complessivamente $P_3 = 6$ terne che rappresentano disposizioni diverse, ma danno luogo ad una unica combinazione. È chiaro che qualunque altra combinazione può provenire da 6 diverse disposizioni. Ne deduciamo che il numero delle combinazioni semplici di 3 oggetti su 5 si ottiene prendendo il numero di disposizioni semplici $D_{5,3}$ e dividendolo per il numero di permutazioni P_3. Otteniamo cosí

$$\frac{D_{5,3}}{P_3} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Possiamo darci anche un'altra spiegazione. Elenchiamo i ragazzi in ordine alfabetico, e accanto al loro nome scriviamo la lettera S se hanno ottenuto il biglietto, la lettera N se non l'hanno avuto. Se, ad esempio, hanno avuto il biglietto Andrea, Beatrice ed Emma scriviamo

S	Andrea
S	Beatrice
N	Carlo
N	Davide
S	Emma

A ben pensare, ogni combinazione corrisponde ad una parola di 5 lettere (tante quanti sono i ragazzi) di cui 3 sono S (tante quanti i biglietti) e le restanti sono N. Dunque il numero complessivo di combinazioni semplici è dato da

$$P'_{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Enunciamo la definizione e la formula generale.

Definizione 4.1: Combinazione semplice

Dati n oggetti distinti, sia $k \leq n$. Una combinazione semplice di k oggetti su n è una collezione di k oggetti distinti scelti tra gli n disponibili. La si chiama anche combinazione semplice di n elementi di classe k.
Indichiamo con $C_{n,k}$ il numero complessivo delle combinazioni semplici di k oggetti su n.

Notate che l'unica differenza fra questa nuova definizione e la Definizione 2.1 è che qui manca l'aggettivo "ordinata".

Proposizione 4.2: Formula per le combinazioni semplici

Siano n e k due numeri naturali con $n \geq k > 0$. Le possibili combinazioni semplici di k elementi su n sono complessivamente

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = P'_{k,n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

La formula che appare nella Proposizione 4.2 è il cosiddetto "coefficiente binomiale", che appare tra l'altro nello sviluppo della potenza di un binomio.

Definizione: coefficiente binomiale

Se n e k sono numeri naturali con $n \geq k \geq 0$. Il simbolo $\binom{n}{k}$ si legge coefficiente binomiale n, k e indica il numero

$$\binom{n}{k} \coloneqq \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Possiamo quindi sintetizzare la Proposizione Proposizione 4.2 nella formula

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Riportiamo alcune proprietà dei coefficienti binomiali che possono risultare utili.

Proposizione 4.3: Proprietà dei coefficienti binomiali

Siano n, k numeri interi con $n \geq k \geq 0$. Dalla definizione di coefficiente binomiale discende che

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \textit{legge delle classi complementari,}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} \qquad \textit{formula di ricorrenza.}$$

Esercizio 4.1

a) *Un concorso con 20 concorrenti si svolge in due fasi: una scritta ed una orale. Al termine della prova scritta, solo i primi 8 vengono ammessi alla prova orale. Quante sono le possibili configurazioni di concorrenti all'orale? Se gli ammessi all'orale fossero 12 anziché 8, il numero di configurazioni aumenterebbe o diminuirebbe? Perché?*

b) *Abbiamo 6 scatole numerate da 1 a 6 e 4 anelli identici. Sapendo che ogni anello è dentro una scatola e che nessuna scatola contiene più di un anello, quante sono le possibili configurazioni?*

4.2. Combinazioni con ripetizioni. Per dare un esempio di combinazione con ripetizioni, immaginiamo di lanciare per tre volte una moneta e ci chiediamo quanti risultati diversi possiamo avere. A differenza della Sezione 3, però, non distinguiamo tra i tre lanci consecutivi, dunque ci interessa solo sapere quante volte è uscito testa e quante volte croce. Stiamo ora facendo una combinazione di tre oggetti (i risultati dei lanci) su due (testa e croce), che ovviamente presenterà delle ripetizioni.

Definizione 4.4: Combinazione con ripetizioni

Sono dati n e k numeri interi con $n, k > 0$. Dati n oggetti distinti, una combinazione con ripetizioni di k oggetti su n è una collezione di k oggetti (non necessariamente distinti) scelti tra gli n disponibili. La si chiama anche combinazione con ripetizioni di n elementi di classe k.
Il numero di tutte le combinazioni con ripetizioni viene indicato con $C'_{n,k}$.

Due combinazioni, dunque, possono differire perché contengono oggetti diversi, oppure perché contengono gli stessi oggetti ma in diverso numero.

Calcolare il numero delle possibili combinazioni con ripetizioni è un po' più complesso dei casi precedenti. Per farci un'idea, torniamo al nostro esempio, elenchiamo le possibili combinazioni e di fianco scriviamo a quali disposizioni corrispondono:

combinazione	disposizioni corrispondenti	numero di disposizioni
TTT	TTT	$1 = P'_{3,0}$
TTC	TTC , TCT , CTT	$3 = P'_{2,1}$
TCC	TCC , CTC , CCT	$3 = P'_{1,2}$
CCC	CCC	$1 = P'_{0,3}$

È ancora vero che ad ogni combinazione corrispondono tutte le disposizioni che si ottengono per permutazione, ma ora il numero di permutazioni è variabile. In questo caso è facile elencare tutte le possibili combinazioni, e vediamo cosí che sono complessivamente 4.

Per ricavare una formula generale costruiamo un problema equivalente. Immaginiamo di avere 3 caramelle (tante quanti i lanci di moneta) da distribuire tra 2 bambini che si chiamano “Testa” e “Croce”. La combinazione TTC, ad esempio, corrisponde a dare 2 caramelle a Testa e 1 a Croce, e la schematizziamo come segue:

Testa		Croce
• •		•
A A	B	A

Scriviamo una A per ogni caramella che diamo e B quando passiamo da un bambino al successivo

In modo analogo, la parola BAAA corrisponde a nessuna Testa e 3 Croce, cioè alla combinazione CCC. Con questo schema, ogni combinazione corrisponde ad una parola formata da 3 lettere A e 1 lettera B, quindi per la Proposizione 3.4 ne abbiamo $P'_{3,1} = \dfrac{(3+1)!}{3!1!} = 4$, come già calcolato in precedenza.

In generale, ogni combinazione con ripetizioni di k oggetti scelti tra n corrisponde ad una parola formata da k lettere A (tante quante sono le scelte che dobbiamo fare) e $n-1$ lettere B (una in meno rispetto agli oggetti tra cui possiamo scegliere, perché corrisponde al ”passaggio” da un oggetto al successivo). Cosí, la Proposizione 3.4 fornisce la formula $P'_{k,n-1} = \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k}$.

In sintesi

Proposizione 4.5: Formula per le combinazioni con ripetizioni

Siano n e k due numeri naturali con $n, k > 0$. Le possibili combinazioni con ripetizioni di k elementi su n sono complessivamente

$$C'_{n,k} = P'_{k,n-1} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdots n}{k!}.$$

Esercizio 4.2

(1) Ho 6 caramelle da distribuire tra 4 bambini, in quanti modi diversi posso farlo?
(2) Ho 4 caramelle da distribuire tra 6 bambini, in quanti modi diversi posso farlo?

5. Esempi notevoli ed ancora esercizi

Una applicazione tipica dei raggruppamenti si ritrova nella modellizzazione delle estrazioni ripetute. Se abbiamo un’urna contenente delle biglie numerate (e dunque distinte) e facciamo due estrazioni, possiamo procedere in tre modi diversi:

- Estraiamo una biglia, la mettiamo da parte e poi procediamo con la seconda estrazione: si parla di estrazione successiva senza reintegro. Il risultato è una disposizione (perché conosciamo l’ordine di estrazione) semplice (perché il primo numero estratto non potrà essere selezionato nell’estrazione successiva).
- Estraiamo due biglie contemporaneamente: si parla di estrazione simultanea. Il risultato è una combinazione (perché i due numeri estratti non sono ordinati) semplice (perché i due numeri sono necessariamente distinti).
- Estraiamo una biglia, poi la reinseriamo nell’urna prima di procedere con la seconda estrazione: si parla di estrazione successiva con reintegro. Il risultato è una disposizione con ripetizioni (se ci interessa l’ordine di estrazione) o una combinazione con ripetizioni (se non ci interessa l’ordine di estrazione).

Se effettuiamo il reintegro, l’ambiente in cui effettuiamo la seconda estrazione è esattamente identico a quello in cui abbiamo effettuato la prima. Al contrario, se procediamo senza reintegro l’estrazione della seconda biglia avviene in un’urna diversa da quella da cui abbiamo estratto la prima biglia (poiché contiene un oggetto in meno).

Vediamo ora qualche esempio tratto dai "giochi d'azzardo". Il risultato dell'ultima estrazione del Lotto è:

GIOCO DEL LOTTO

Estrazione n.192 - Sabato 30 Novembre 2024

BARI	25	46	41	83	89
CAGLIARI	13	80	42	53	51
FIRENZE	87	26	10	34	2
GENOVA	3	69	74	44	70
MILANO	63	55	33	53	15
NAPOLI	90	66	76	69	23
PALERMO	59	58	66	24	29
ROMA	58	43	23	5	50
TORINO	53	34	17	15	9
VENEZIA	90	73	82	22	39
NAZIONALE	25	81	37	30	58

Sulla ruota di Napoli abbiamo un raggruppamento di 5 numeri scelti su 90 disponibili. Poiché i numeri vengono estratti in successione dall'urna, non sono ammesse ripetizioni; pertanto il raggruppamento è semplice. Si tratta di una disposizione o di una combinazione? Poiché viene specificato l'ordine dell'estrazione, abbiamo a che fare con una disposizione. D'altra parte, l'ordine con cui vengono estratti i numeri non influisce sulla possibilità di vincere, pertanto a chi gioca al lotto interessano le combinazioni semplici di 5 numeri su 90.
Alla luce di quanto studiato, sappiamo che i possibili risultati dell'estrazione sulla ruota di Napoli sono

$$D_{90,5} = \frac{90!}{85!} = 5\,273\,912\,160.$$

Questo significa che se giochiamo 5 numeri abbiamo una possibilità su 5 273 912 160 di fare cinquina? No! In realtà ne abbiamo *molte* di più, perché vinciamo indovinando la combinazione vincente, indipendentemente dall'ordine. Le combinazioni possibili sono

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

In ogni caso le probabilità a me sembrano molto basse!

Quando giochiamo una colonna al Totocalcio, abbiamo a disposizione 3 oggetti distinti: 1 X e 2. Dobbiamo sceglierli 13 volte (una volta per ogni partita) e ci interessa l'ordine in cui li disponiamo nella colonna (ogni riga corrisponde ad una determinata partita). Si tratta dunque di una disposizione (con ripetizioni) di 13 oggetti su 3.
Il numero di colonne diverse che si possono giocare è

$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1\,595\,323.$$

Se lanciamo ripetutamente per tre volte un dado e annotiamo i risultati ottenuti, possiamo farlo in due modi diversi.
Se ricordiamo l'ordine in cui sono usciti i tre numeri, otteniamo una disposizione (con ripetizioni) di 3 elementi su 6. In questo caso abbiamo

$$D'_{6,3} = 6^3 = 216$$

configurazioni diverse. Se invece ci interessano solo i tre numeri usciti, indipendentemente dall'ordine, allora abbiamo una combinazione (con ripetizioni). I risultati possibili sono di meno, precisamente

$$C'_{6,3} = \binom{8}{3} = 56.$$

Se, a parità di premio finale, doveste scegliere tra scommettere sulla cinquina al lotto, sul 13 alla schedina o sul lancio di 3 dadi, quale scegliereste?

Esercizio 5.1

Quante sono le possibili combinazioni di una cassaforte a 5 cifre?

Svolgimento. Abbiamo a disposizione 36 oggetti distinti: le 26 lettere più le 10 cifre da 0 a 9. La combinazione di una cassaforte è una disposizione con ripetizioni di 5 oggetti su 36 (scusate il gioco di parole). Dunque il numero di tutte le combinazioni possibili è $\mathcal{D}'_{36,5} = 36^5 = 60\,466\,176$. □

Esercizio 5.2

Nell'estrazione del lotto (su un'unica ruota)

a) *Quanti sono i terni che si possono giocare?*
b) *Conoscendo il risultato dell'estrazione, quanti sono i terni vincenti?*
c) *Immaginiamo di aver scelto una specifica terna di numeri. Quante sono le estrazioni (senza contare l'ordine di estrazione) che la rendono vincente?*

Esercizio 5.3

a) *Ho deciso di giocare una schedina di Totocalcio di un'unica colonna in cui ci siano esattamente cinque 1, sette X e un 2. In quanti modi diversi posso farlo?*
b) *Tra tutte le possibili colonne, quante contengono esattamente un 2? (con l'aggettivo "esattamente" si precisa che il 2 deve comparire una e una sola volta)*
c) *Quante, invece, contengono almeno un 2? (con l'avverbio "almeno" si precisa che il 2 deve comparire una o più volte)*

Esercizio 5.4

a) *In un'urna ci sono dieci palline numerate da 1 a 10; tre sono bianche e le altre nere. Quante sono le cinquine che contengono esattamente una pallina bianca?*
b) *Un'urna contiene 3 palline di colore diverso: una bianca, una rossa e una nera. Se faccio 4 estrazioni consecutive (rimettendo dentro all'urna la pallina dopo ogni estrazione), quante sequenze di colori diverse posso ottenere?*
c) *Un'urna contiene 12 palline bianche e 3 nere. Se pesco 4 palline simultaneamente, quante quaterne posso ottenere che contengano almeno una pallina nera?*

Esercizio 5.5

Ho un mazzo di carte da poker, composto da 52 carte (senza jolly), ed estraggo simultaneamente due carte.

a) *Quante sono le possibili coppie estratte?*
b) *Quante, tra le possibili coppie estratte, contengono almeno una carta di cuori?*
c) *Quante contengono due carte di quadri?*
d) *Quante contengono una carta di cuori e una di quadri?*

Esercizio 5.6

a) In un gruppo di 25 persone, devono essere scelti due delegati. In quanti modi diversi è possibile farlo?
b) Sapendo che il gruppo è composto da 14 donne e 11 uomini, quante di queste delegazioni rappresentano entrambi i generi?
c) Rispondere alle domande precedenti considerando una delegazione composta da tre persone.