ESERCITAZIONE n.7: Integrali curvilinei (di prima specie) e doppi

ESERCIZIO 1. Calcolare la lunghezza degli archi regolari a tratti:

1.a) l'arco di circonferenza di raggio 3 e centro l'origine compresa tra i punti $(3,0)$ e $(-3/2, -3\sqrt{3}/2)$.

1.b) la curva chiusa ottenuta concatenando l'arco di circonferenza di raggio 1 e centro l'origine contenuta nel primo quadrante con il segmento che unisce i suoi estremi.

1.c) l'arco di spirale piana $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ con $0 \le t \le \pi$.

1.d) la curva piana parametrizzata da $(3t^2, 2t^3)$ con $0 \le t \le 1$.

1.e) l'arco di elica cilindrica di raggio 4 e passo 3 $(4\cos t, 4\sin t, 3t)$ con $0 \le t \le 2\pi$.

ESERCIZIO 2. Rappresentare graficamente i cammini d'integrazione γ e calcolare gli integrali curvilinei indicati:

2.1) $\gamma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)),\ ;\ -1 \le t \le 1$ $\qquad \displaystyle\int_\gamma (x - 2y)\ \mathrm{d}s$

2.2) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad -\pi \le t \le \pi$ $\qquad \displaystyle\int_\gamma (x - 2y)\ \mathrm{d}s$

2.3) $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t) \quad t \in [0, \pi/2]$ $\qquad \displaystyle\int_\gamma xy\ \mathrm{d}s$

2.4) $\gamma(t) = \big(1 + t^2, t\big) \quad t \in [0,1]$ $\qquad \displaystyle\int_\gamma \frac{y\ \cos x}{\sqrt{4y^2+1}}\ \mathrm{d}s$

ESERCIZIO 3.

3.1) Calcolare l'integrale curvilineo della funzione $f(x,y) = e^{5x} - xy^2$ lungo il segmento congiungente i punti $(0,2)$ e $(2,0)$.

3.2) Calcolare l'integrale curvilineo della funzione $f(x,y) = xy$, dapprima lungo il segmento congiungente i punti $(0,1)$ e $(1,0)$, poi lungo l'arco di circonferenza unitaria congiungente gli stessi punti.

ESERCIZIO 4. Dopo aver rappresentato graficamente i domini d'integrazione D, calcolare gli integrali doppi utilizzando opportunamente le formule di riduzione o di cambiamento di variabili:

4.1) $\displaystyle\iint_D (4 - x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad D = \{(x,y)\ :\ -1 \le 2x \le 1,\ 3x^2 - 2 \le y \le \frac{1}{4} - x^2\}$

4.2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(2-x)^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad D = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1 - y^2\}$

4.3) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{xy}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$

4.4) $\displaystyle\iint_D y^2 e^{xy}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$

4.5) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad D = \{(x,y)\ :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

4.6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{10-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ D è il semicerchio di centro l'origine e raggio 3 contenuto nel semipiano $x \geq 0$

4.7) $\displaystyle\iint_D e^{-y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ $D = \{(x,y)\ :\ 2y-3 \leq x \leq 2-y,\ y \geq 0\}$

4.8) $\displaystyle\iint_D (xy+2y^3)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ $D = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 4\ \text{ e }\ y \geq 0\}$

4.9) $\displaystyle\iint_D (1+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ D è il semicerchio di raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$

4.10) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ $D = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1\ \text{ e }\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

4.11) $\displaystyle\iint_D (x^2+4y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ $D = \{(x,y)\ :\ \dfrac{x^2}{4}+y^2 \leq 1\}$

4.12) $\displaystyle\iint_D x^2\cos(xy)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$

4.13) $\displaystyle\iint_D (y-3x^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(1,1)$

4.14) $\displaystyle\iint_D (3+2x-y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ $D = \{(x,y)\ :\ 0 \leq 2x-y \leq 3\ \text{ e }\ 0 \leq 2y-x \leq 3\}$

4.15) $\displaystyle\iint_D \frac{2x-y}{x-2y+4}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,3)$ e $(1,2)$,

4.16) $\displaystyle\iint_D \cos x\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ D è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(2,0)$, e $(1,1)$.