

ESERCITAZIONE n.5: Limiti e calcolo differenziale in più variabili

ESERCIZIO 1. Verificare che

$$1.1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 2y^3}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$1.2) \quad \text{non esiste} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^3 + y^4},$$

$$1.3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} (x-1)^4 + (y+2)^2 = 0,$$

$$1.4) \quad \text{non esiste} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2},$$

$$1.5) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} e^{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

ESERCIZIO 2. Siano date le funzioni ed i punti:

$$2.1) \quad f(x, y) = \sin(xy - 3x^2)$$

$$P = (0, 0)$$

$$2.2) \quad f(x, y) = e^{x^2 - xy^4} + y$$

$$P = (0, -1)$$

$$2.3) \quad f(x, y) = (x^4 + 1)|y - 1|$$

$$P_0 = (0, 0), P_1 = (-1, 1)$$

$$2.4) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_o = (0, 0),$$

2.a) Per ogni funzione, dopo aver individuato il dominio, stabilire su quale insieme è continua, derivabile, di classe  $C^1$ , differenziabile.

2.b) Calcolare le derivate parziali e il gradiente nei punti rispettivamente a fianco indicati.

2.c) Calcolare infine, nei punti a fianco indicati, la derivata direzionale nella direzione

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3. Quando possibile, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni, nei punti a fianco indicati:

$$3.1) \quad f(x, y) = \frac{x^5 - 3x^7}{1 + y} \quad (0, 0)$$

$$3.2) \quad f(x, y) = \log \frac{(x - 2y)^3}{1 - xy} \quad \left(-4, -\frac{1}{2}\right)$$

$$3.3) \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^4 y^2}}{x - y} \quad (1, 0)$$

ESERCIZIO 4. Individuare, se esistono, tutti i punti stazionari delle funzioni di legge:

$$4.1) \quad x^3 - 3xy^2 + 2y - 5,$$

$$4.2) \quad e^{x^2+3y^2-5},$$

$$4.3) \quad x \log y,$$

$$4.4) \quad x^3 + 6xy + y^2,$$

$$4.5) \quad (x - y^2)e^x,$$

$$4.6) \quad x^3 + xy + y^2 + yz + z^2.$$