

ESERCITAZIONE n.3: Serie di potenze e funzioni analitiche

ESERCIZIO 1. Determinare il raggio e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\begin{array}{lll}
 1.1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^n & 1.2) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^2} x^n & 1.3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2n!} \\
 1.4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2} (x-2)^n & 1.5) \sum_{n=1}^{+\infty} \log n x^n & 1.6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}} \\
 1.7) \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{1/n} - 1)(x+1)^n & 1.8) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-x)^n}{n+2} & 1.9) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} \\
 1.10) \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{\sqrt{n}} (x-2)^x & 1.11) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n} &
 \end{array}$$

ESERCIZIO 2. Studiare la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3^n}{n5^n} (x-1)^n$ e dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| a) La serie converge assolutamente nell'intervallo $(-2/3, 8/3)$ | ☐ V | ☐ F |
| b) La serie converge totalmente nell'intervallo $(-2/3, 8/3)$ | ☐ V | ☐ F |
| c) La serie converge assolutamente nell'intervallo $[-2/3, 8/3]$ | ☐ V | ☐ F |
| d) La serie converge totalmente nell'intervallo $[0, 1]$ | ☐ V | ☐ F |
| e) La serie converge puntualmente in $x = 1$ | ☐ V | ☐ F |
| f) La serie converge puntualmente in $x = 8/3$ | ☐ V | ☐ F |
| g) La serie converge puntualmente in $x = -2/3$ | ☐ V | ☐ F |
| h) La serie diverge in $x = 3$ | ☐ V | ☐ F |
| i) La serie diverge in $x = -1$ | ☐ V | ☐ F |

ESERCIZIO 3. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni:

$$\begin{array}{lll}
 3.1) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n-2}{3n+1} \right)^n x^{2n} & 3.2) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n\sqrt{x}}{2n+1} \right)^n & 3.3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n(x-1)^n} \\
 3.4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{1+n^2} x^n} & 3.5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} & 3.6) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n e^{nx}}{1+2n} \\
 3.7) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} & 3.8) \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{2}{n} \right) (1-|x|)^n &
 \end{array}$$

ESERCIZIO 4. Verificare che le seguenti funzioni sono analitiche in un intervallo contenente il punto $x_o = 0$ (precisando quale sia tale intervallo!) e scriverne la serie di Taylor centrata in $x_o = 0$ (nota anche come serie di Mc Laurin)

4.1) $\frac{1}{1+x}$

4.2) $\frac{1}{4-x}$

4.3) $\frac{1}{1-x^2}$

4.4) $1-x$

4.5) $(x+2)^2$

4.6) $\log(1+x)$

4.7) e^x

4.8) e^{x^2}

4.9) $\cos x$

4.10) $\sin(2x)$

ESERCIZIO 5. Usando i risultati dell'esercizio precedente, calcolare per serie gli integrali:

5.a) $\int_0^1 e^{x^2} dx$

5.b) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos \sqrt{x} dx$