

ESERCITAZIONE n.2: Serie numeriche

ESERCIZIO 1. Stabilire se le seguenti serie sono convergenti, e in caso affermativo calcolarne la somma

$$1.1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

$$1.2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

$$1.3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}}$$

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere delle serie a termini positivi:

$$2.1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

$$2.2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$2.3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

$$2.4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$2.5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^{n/2}}$$

$$2.6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sqrt{n}}{4^n}$$

$$2.7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$$

$$2.8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$2.9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

$$2.10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n - \sqrt{n}}{n^4 - n}$$

$$2.11) \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$2.12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 + n + 1}$$

$$2.13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n!}$$

$$2.14) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + 3n + n^2}{1 + 3n^2}\right)^n$$

$$2.15) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

$$2.16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

$$2.17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$$

$$2.18) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

$$2.19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{n-1}}$$

$$2.20) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{n-3}{n^2+1}\right)$$

$$2.21) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+3n}{5+2n}\right)^n$$

ESERCIZIO 3. Dimostrare che

3.a) la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$  è divergente,

3.b) la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$  è convergente.

ESERCIZIO 4. Studiare il carattere delle seguenti serie a segni alterni, precisando innanzi tutto se sono assolutamente convergenti:

$$4.1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$4.2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$$

$$4.3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n - n}$$

$$4.4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{1/n} - 1)$$

$$4.5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$4.6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$4.7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$$

$$4.8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n!}$$

$$4.9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[3]{n}$$

ESERCIZIO 5. Studiare il carattere delle seguenti serie, precisando il criterio utilizzato e giustificandone l'applicazione:

$$5.1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{5^n + n}$$

$$5.2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{(n + \log n)^3}$$

$$5.3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n - 1}$$

$$5.4) \sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 2n)^{-\frac{1}{2}}$$

$$5.5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{1 + 2n + n^4}$$

$$5.6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{1 + 2n + n^4}$$