Scuola Interdipartimentale delle Scienze, dell'Ingegneria e della Salute

DiST – Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_08

Argomenti trattati

- Richiami su autovalori ed autovettori.
- Calcolo degli autovalori e degli autovettori.
- Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.
- Proprietà degli autovalori ed autovettori di matrici qualsiasi e di matrici simmetriche.
- Interpretazione geometrica di autovalori ed autovettori.

(prof. M. Rizzardi)

ACS parte 2: ACS_08

Argomenti trattati

- Autovalori ed autovettori di particolari matrici simmetriche.
- Autovalori ed autovettori di alcune applicazioni lineari.
- Diagonalizzazione. Teor. Spettrale.
- Relazione tra SVD e diagonalizzazione.
- Applicazioni della diagonalizzazione e di autovalori/autovettori.

Richiami: autovalori ed autovettori di una matrice

A è una matrice $n \times n$ (quadrata)

λ ***autovalore*** di A $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

il sistema lineare omogeneo
$$Ax = \lambda x$$
è indeterminato

$\Leftrightarrow$

il sistema $Ax=\lambda x$ ammette infinite soluzioni $x \neq \underline{0}$

x ***autovettore*** di A relativo all'autovalore λ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$x \neq \underline{0}$ è una soluzione del sistema
$$Ax = \lambda x$$

$$\boxed{Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0}$$

Come determinare le incognite del problema: λ, x?

$$(A-\lambda I)x=\underline{0} \iff \det(A-\lambda I)=0$$

$$\det(A-\lambda I)=\boxed{c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\ldots+c_n\lambda^n}$$

A matrice quadrata $n\times n$ $\Rightarrow$ polinomio di grado n

polinomio caratteristico

Gli autovalori sono le n radici del polinomio caratteristico

Esempio

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=\lambda^2-\lambda-2$$

```
A=[4 -5;2 -3];
syms lambda; B=A - lambda*eye(size(A));
S=solve(det(B),lambda)
S =
-1
 2
```

$\det(A-\lambda I)=0$

radici: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=+2$

autovalori

Calcolare gli autovalori dalla definizione in MATLAB

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

numerico

```
A=[4 -5;2 -3];
disp(eig(A).')
   2     -1
disp(charpoly(A))
     1     -1     -2
disp(roots(charpoly(A)).')
   2     -1
```

```
syms x real
disp(charpoly(A,x))
x^2 - x - 2
```

sia numerico che simbolico

```
d=roots(charpoly(A));
```

simbolico

```
A=sym([4 -5;2 -3]);
disp(eig(A).')
[-1,  2]
disp(charpoly(A))
[1, -1, -2]
disp(roots(charpoly(A)).')
[-1,  2]
```

charpoly(A) restituisce i coefficienti del polinomio caratteristico di **A**

charpoly(A,x) (solo simbolica) restituisce il polinomio caratteristico di **A** risp. a **x**

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

numerico

```
A=[3 -2 0;-2 3 0;0 0 5];
disp(eig(A).')
     1     5     5
disp(charpoly(A))
   1    -11     35    -25
disp(roots(charpoly(A)).')
     5     5     1
```

```
syms x real
disp(charpoly(A,x))
x^3 - 11*x^2 + 35*x - 25
```

sia numerico che simbolico

```
d=roots(charpoly(A));
```

simbolico

```
A=sym([3 -2 0;-2 3 0;0 0 5]);
disp(eig(A).')
[1, 5, 5]
disp(charpoly(A))
[1, -11, 35, -25]
disp(roots(charpoly(A)).')
[1, 5, 5]
```

Se la matrice è reale, il suo polinomio caratteristico ha coefficienti reali: di che tipo sono le sue radici?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -\lambda & -1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$, radici: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = +i,\ \lambda_3 = -i$

autovalori complessi!

```
A=[1 0 0;5 0 -1;3 1 0]; disp(charpoly(A))
 1    -1     1    -1
disp(eig(A).')
     0 + 1i      0 - 1i      1 + 0i
```

Anche se la matrice A è reale, **niente** può dirsi sull'esistenza di autovalori reali. Il **Teorema Fondamentale dell'Algebra** (anche noto come Teorema di d'Alembert o Teorema di d'Alembert-Gauss "un polinomio di grado n ha esattamente n radici complesse") implica che:

Una matrice di dimensione n ha n autovalori complessi, alcuni dei quali possono essere reali, e ogni autovalore complesso compare sempre accoppiato al suo complesso coniugato.

Il calcolo degli autovalori è immediato quando la matrice è diagonale o triangolare; in tali casi gli autovalori sono esattamente gli elementi sulla diagonale principale.

La fattorizzazione LU **NON** preserva gli autovalori.

Esempi

matrice triangolare inferiore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 2 & \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & & \\ 0 & 2-\lambda & \\ 4 & 5 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Gli autovalori sono: **1**, **2**, **3**.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

autovalori of A: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = +2$

diversi

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & \\ ½ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -½ \end{pmatrix}$$

autovalori of U: $\lambda_1 = -1/2, \quad \lambda_2 = +4$

Per determinare tutti gli **autovettori** relativi ad un particolare autovalore λ^*, si devono calcolare le infinite soluzioni x^* del seguente sistema lineare omogeneo indeterminato

$$(\mathbf{A}-\lambda^*\mathbf{I})\,\boldsymbol{x}^* = \underline{0}$$

cioè si calcola lo ***Spazio Nullo*** della matrice

$$\mathbf{A}-\lambda^*\mathbf{I}$$

Tale sottospazio V_{λ^*} prende il nome di

autospazio relativo a λ^*:

$$V_{\lambda^*} = \mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda^*\mathbf{I})$$

Esempi: calcolo di autovettori

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$ autovalori: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = +2$

sia numerico che simbolico

```
d=roots(charpoly(A));
```

```
A=[4 -5;2 -3];
d=eig(A)
d =
    2
   -1
```

```
A=sym([4 -5;2 -3]);
d=eig(A)
d =
-1
 2
```

autovalori

$$A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = \text{span}\{(1,1)^T\}$$

$\lambda_1 = -1$

```
null(A-d(2)*eye(2))
ans =
     0.7071
     0.7071
```

```
null(A-d(1)*eye(2))
ans =
1
1
```

base V_{-1}

autospazi

```
null(A-d(1)*eye(2))
ans =
     0.9285
     0.3714
```

```
null(A-d(2)*eye(2))
ans =
5/2
  1
```

base V_{+2}

$\lambda_2 = +2$

$$A-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$V_{+2} = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \text{span}\{(5,2)^T\}$$

```
[V,d]=eig(A,'vector')
d =
    2
  -1
```

```
V =
        0.9285      0.7071
        0.3714      0.7071
```

basi dei due autospazi

```
[V,D]=eig(A)
V =
[1, 5/2]
[1,   1]
```

```
D =
[-1, 0]
[ 0, 2]
```

Funzione MATLAB eig: calcolare autovalori/autovettori

numericamente

```
A=[4 -5;2 -3];
[V, D]=eig(A)
V =
   0.9285    0.7071
   0.3714    0.7071
D =
      2      0
      0     -1
```

vettori normalizzati ($\|\cdot\|_2=1$) ma non ortogonali!

```
disp(V'*V)
   1.0000    0.9191
   0.9191    1.0000
```

V: ogni colonna rappresenta una base per l'autospazio dell'autovalore corrispondente

D: la diagonale della matrice contiene gli autovalori

```
[V, d] = eig(A,'vector')
V =
   0.92848     0.70711
   0.37139     0.70711
d =
      2
     -1
V1=null(A-d(1)*eye(size(A)))
V1 =
   0.92848
   0.37139
V2=null(A-d(2)*eye(size(A)))
V2 =
   0.70711
   0.70711
```

vettore degli autovalori

simbolicamente

```
A=sym([4 -5;2 -3]);
[V, D]=eig(A)
V =
[   1,  5/2]
[   1,    1]
D =
[   -1     0]
[    0     2]
disp(rank([V1 V(:,2)]))
1
disp(rank([V2 V(:,1)]))
1
```

vettori non normalizzati

(prof. M. Rizzardi)

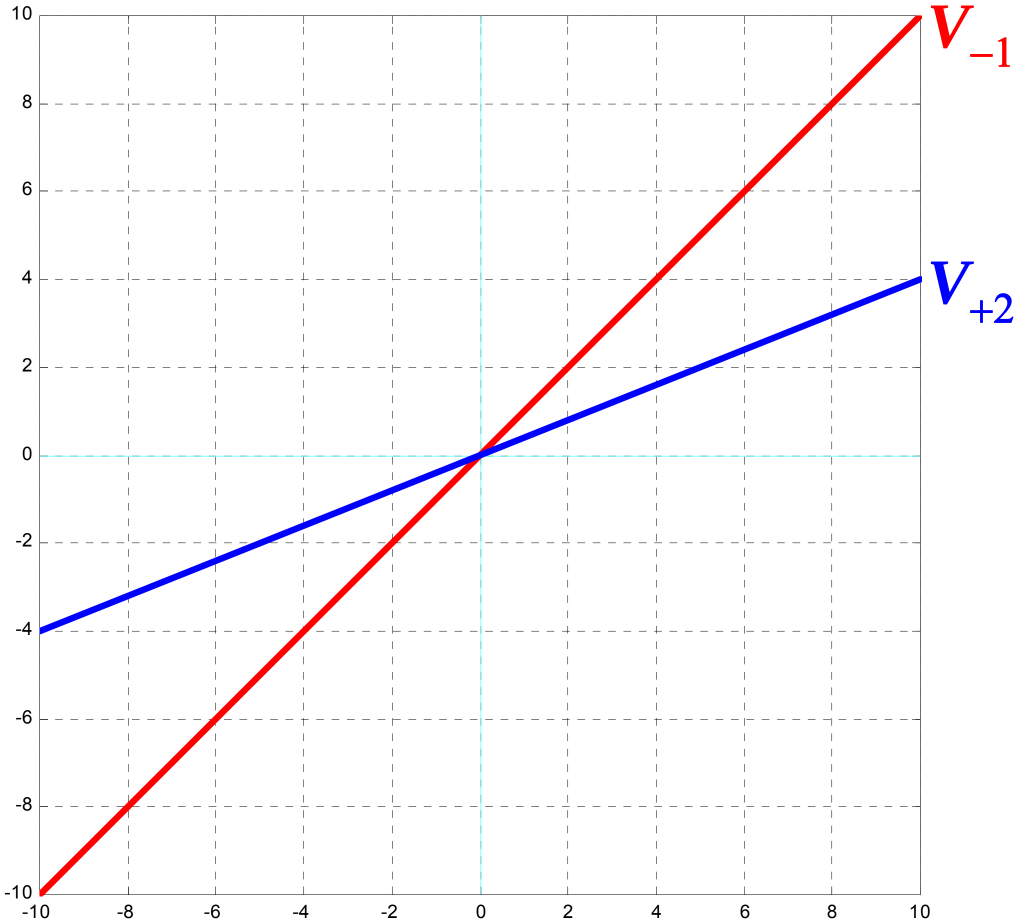
autospazi of $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Spettro (insieme degli autovalori) di $\mathbf{A}$

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = +2\}$$

$$V_{-1} = \mathcal{N}(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}) = \mathbf{span}\{(1,1)^T\}$$

$$V_{+2} = \mathcal{N}(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) = \mathbf{span}\{(5,2)^T\}$$



Funzione MATLAB eig: calcolare autovalori/autovettori

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

radice semplice

autovalori: $\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = \lambda_3 = 5$

radice doppia

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda=1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \text{span}\{(1,1,0)^T\}$$

```
A=[3 -2 1; -2 3 0; 0 0 5];
[V, D] = eig(A)
V =
    0.7071    0.7071   -0.7071
   -0.7071    0.7071    0.7071
         0         0 1.5701e-15
D =
         5         0         0
         0         1         0
         0         0         5
```

paralleli

```
V1=null(A-D(1,1)*eye(size(A)))
V1 =
1
1
0
```

```
[V, D] = eig(sym(A))
V =
[  1, -1]
[  1,  1]
[  0,  0]
D =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 5, 0]
[ 0, 0, 5]
```

autospazi

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
V2=null(A-D(2,2)*eye(size(A)))
V2 =
-1
 1
 0
```

$$V_{\lambda=5} = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \text{span}\{(-1,1,0)^T\}$$

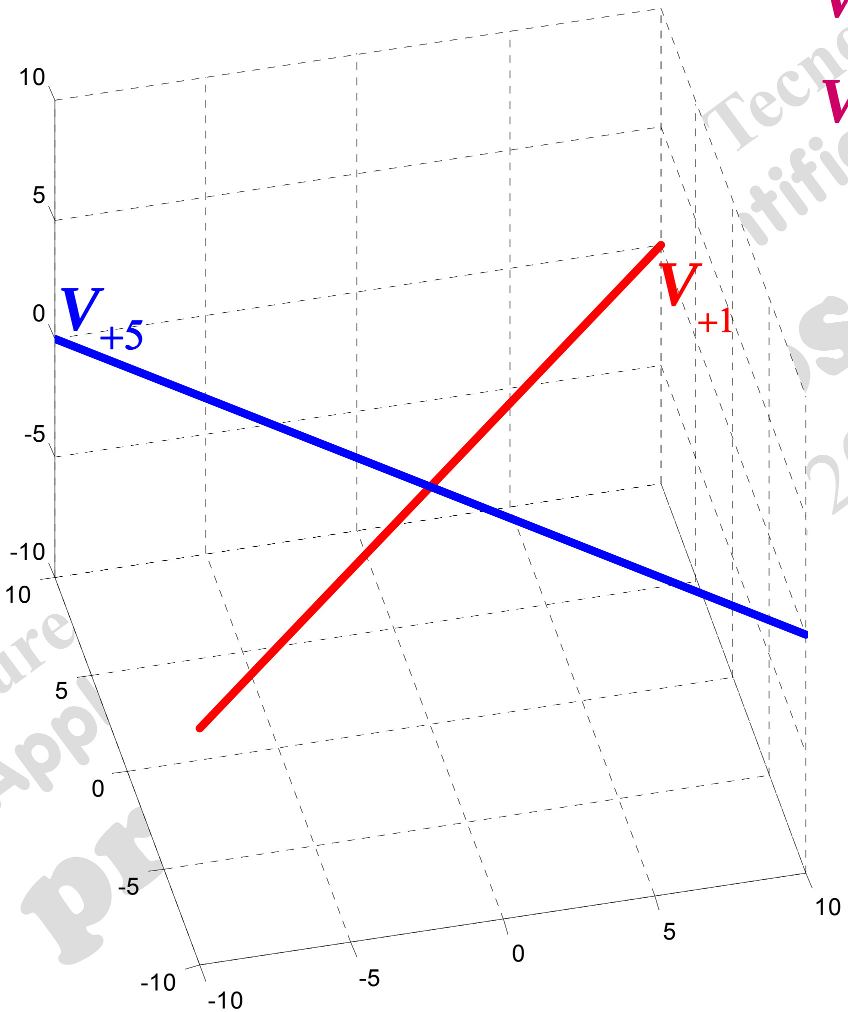
autospazi of $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Spettro (insieme degli autovalori) di $\mathbf{A}$

$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1=+1,\ \lambda_2=+5\}$

$V_{+1}=\mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = \mathbf{span}\{(1,1,0)^T\}$

$V_{+5}=\mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \mathbf{span}\{(-1,1,0)^T\}$



Funzione MATLAB eig: calcolare autovalori/autovettori

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$ simmetrica

autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5$

$$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$V_1=\mathcal{N}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}) = \mathbf{span}\{(1,1,0)^T\}$$

autospazi

$$\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_2=\mathcal{N}(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}) = \mathbf{span}\{(-1,1,0)^T,(0,0,1)^T\}$$

```
A=[3 -2 0;-2 3 0; 0 0 5];
[V, D]=eig(sym(A))
V =
[1, -1, 0]
[1,  1, 0]
[0,  0, 1]
D =
[1, 0, 0]
[0, 5, 0]
[0, 0, 5]
```

```
d=roots(charpoly(A));
syms lambda
B=A-lambda*eye(size(A));
```

```
V1=null(subs(B,lambda,d(1)))
V1 =
1
1
0
```

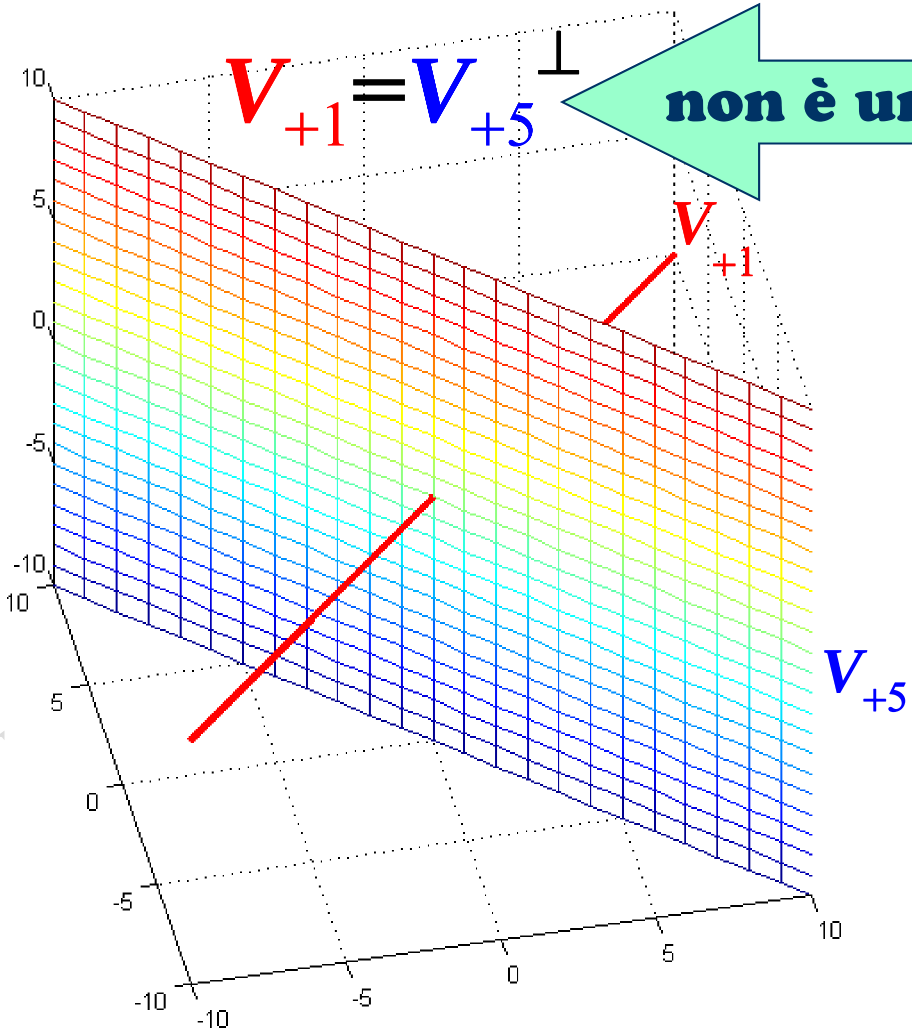
```
V2=null(subs(B,lambda,d(2)))
V2 =
[-1, 0]
[ 1, 0]
[ 0, 1]
```

autospazi di $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

matrice simmetrica

$V_{+1} = V_{+5}^{\perp}$

non è un caso!




```
A=[3 -2 0;-2 3 0; 0 0 5];
[V,D]=eig(sym(A));
disp(rank(V))
3
syms lambda
B=A-lambda*eye(size(A));
V1=null(subs(B,lambda,D(1,1)));
V2=null(subs(B,lambda,D(2,2)));
subspace(V1,V2)
ans =
pi/2
```

autospazi ortogonali

$\nu(\lambda)$ ***molteplicità algebrica*** dell'autovalore λ

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico

$\mu(\lambda)$ ***molteplicità geometrica*** dell'autovalore λ

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

dimensione dell'autospazio corrispondente V_λ

Si dimostra che:

1) $\boxed{\mu(\lambda) \le \nu(\lambda),\ \forall\lambda}$

(la molteplicità geometrica non supera la molteplicità algebrica)

$A(n\times n) \Rightarrow$ 2) $\boxed{\sum_j \nu(\lambda_j) = n}$

1) + 2) $\Rightarrow$ la somma delle dimensioni di tutti gli autospazi è al più n

Proprietà degli autovalori/autovettori di una qualsiasi matrice quadrata $A_{(n\times n)}$

Sia $A_{n\times n}$ una qualsiasi matrice quadrata reale

1. Ogni autovalore è univocamente determinato dal suo autovettore, mentre esistono infiniti autovettori relativi ad un particolare autovalore;

2. Se λ è un autovalore di A e x è un autovettore corrispondente, allora λ^2 è un autovalore di A^2 e x un suo relativo autovettore;

3. Se $\lambda\neq 0$ è un autovalore di A (invertibile) e x un corrispondente autovettore non nullo, allora λ^{-1} è un autovalore di A^{-1} e x è un suo relativo autovettore;

4. Le matrici A e A^T hanno gli stessi autovalori;

Proprietà degli autovalori/autovettori di una qualsiasi matrice quadrata $A_{(n \times n)}$

5. Autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti;
6. Il prodotto di tutti gli autovalori di una matrice eguaglia il determinante della matrice (in particolare, se $\exists\ \lambda=0$ allora $\det(A)=0$);
7. la somma di tutti gli autovalori di una matrice eguaglia la somma degli elementi sulla diagonale principale di A (detta traccia della matrice):

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Proprietà degli autovalori/autovettori di una matrice reale simmetrica $A_{(n\times n)}$

$$A^{T} = A$$

in aggiunta:

8. Gli autovalori sono tutti reali ($\sigma(A)\subset\mathbb{R}$)*;

* caso particolare di "gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali"

9. Autospazi corrispondenti ad autovalori diversi sono mutuamente ortogonali;

10. Se λ è un autovalore di molteplicità algebrica $\nu(\lambda)$, allora il corrispondente autospazio ha dimensione: $\mu(\lambda)=\nu(\lambda)$, cioè la molteplicità geometrica $\mu(\lambda)$ eguaglia la molteplicità algebrica $\nu(\lambda)$;

11. $\mathbb{R}^n$ può essere ottenuto come somma diretta di tutti gli autospazi;

12. A è diagonalizzabile (come si vedrà in seguito …)

A simmetrica e definita positiva $\Rightarrow$ tutti gli autovalori sono positivi

Interpretazione geometrica di autovalori/autovettori

Se si considera l'endomorfismo associato alla matrice A

$$t_A \;:\; x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^n$$

risolvere l'equazione $Ax=\lambda x$ è lo stesso che cercare un vettore x il cui vettore immagine $y=t_A(x)=Ax$ giaccia parallelo ad x, poiché solo i vettori paralleli hanno le componenti proporzionali:

$$y = t_A(x) = Ax = \lambda x$$

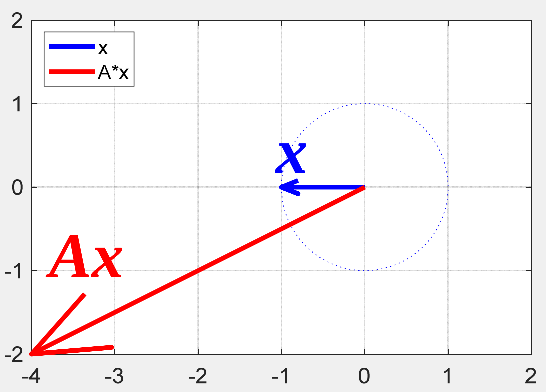
La constante di proporzionalità (cioè il fattore di scala) tra le componenti dell'autovettore x e la sua immagine $y=t_A(x)$ è l'*auto-valore* λ_x di A, e il corrispondente *autospazio* V_{λ_x} consiste di tutti i vettori che hanno la stessa proprietà di x.

Pertanto ogni autospazio rimane complessivamente **immutato** dalla trasformazione t_A, cioè $t_A(V_\lambda)=V_\lambda$ (da qui il termine *auto*spazio), sebbene i singoli vettori non necessariamente si transformino in sé stessi a meno che l'autovalore non sia 1.

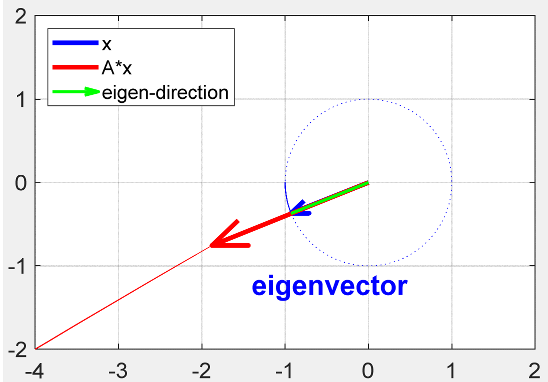
Esempio: download `eigenvectors.p` (autovettori di una matrice)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

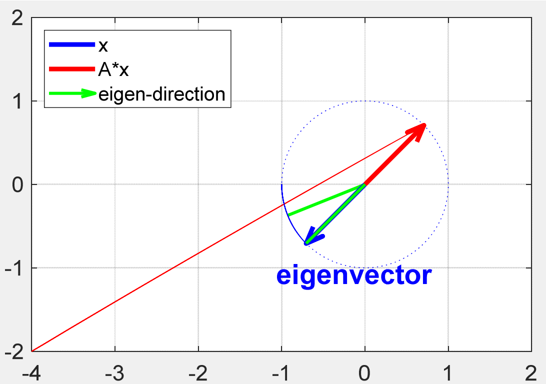
```
A=[4 -5;2 -3];
[V,D]=eig(A,'vector')
V =
    0.92848     0.70711
    0.37139     0.70711
D =
          2  λ1
         -1  λ2
```



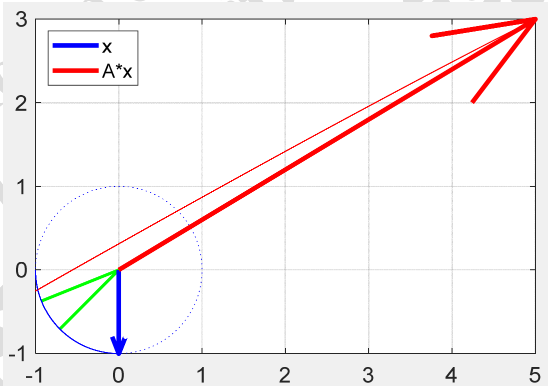
x si muove sulla circonferenza unitaria

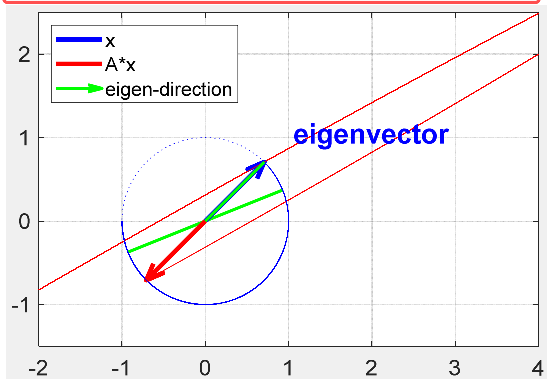


autovettore relativo a $\lambda_1 = +2$: Ax è il doppio della lunghezza di x

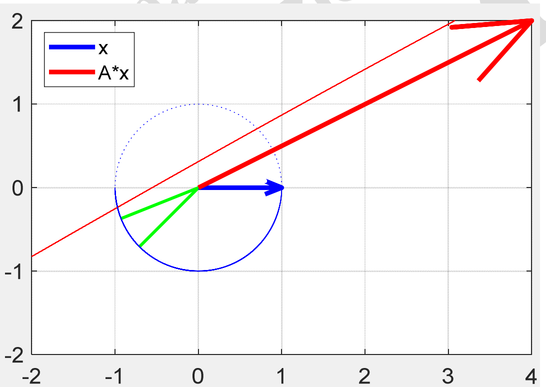


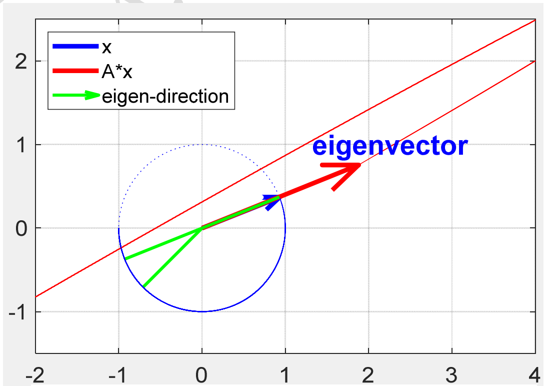
autovettore relativo a $\lambda_2 = -1$: Ax è l'opposto di x



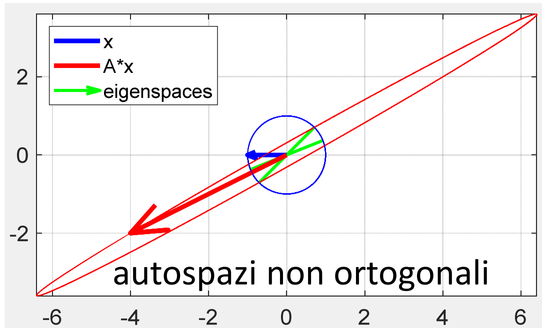


autovettore relativo a $\lambda_2 = -1$





autovettore relativo a $\lambda_1 = +2$



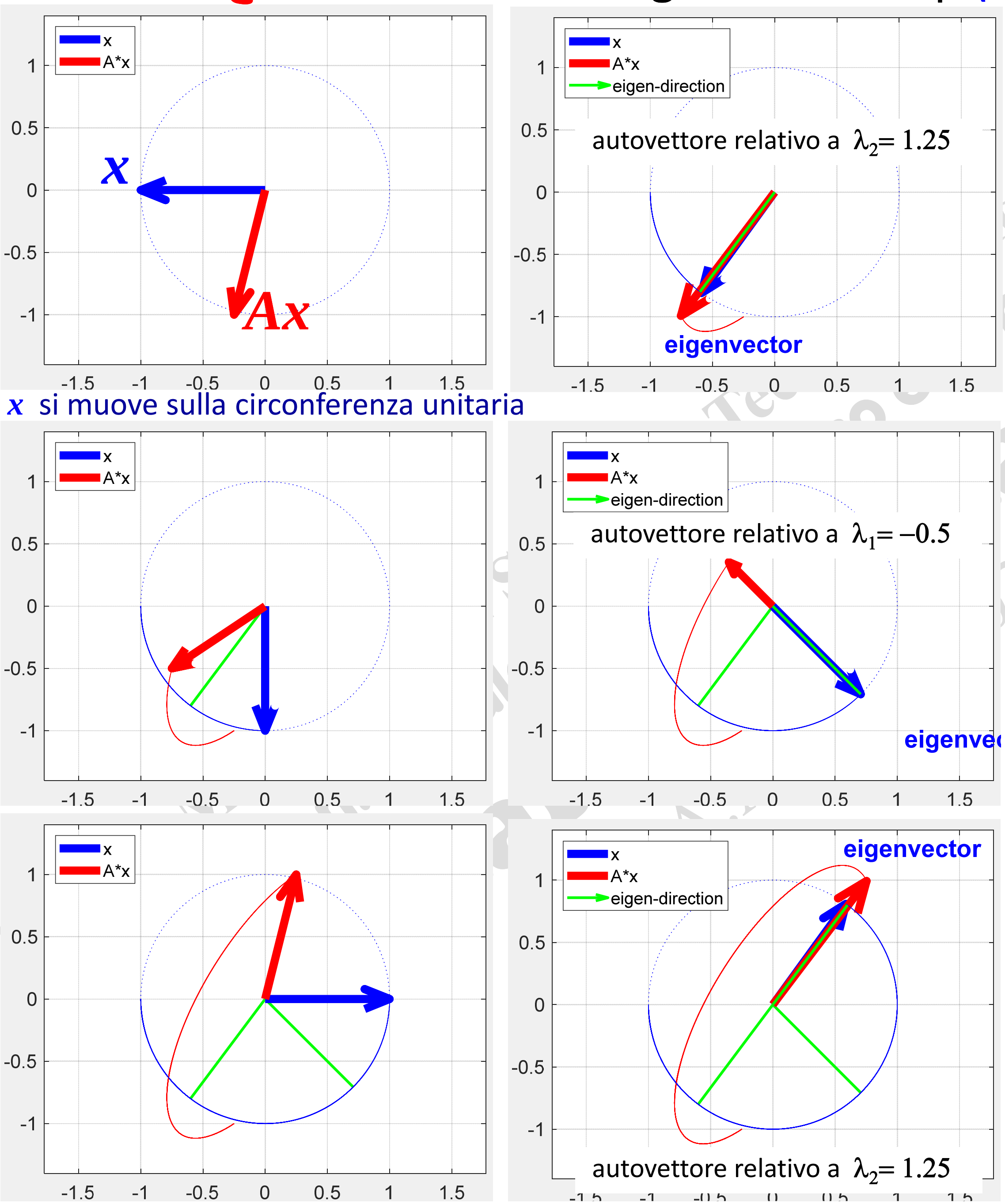
autospazi non ortogonali

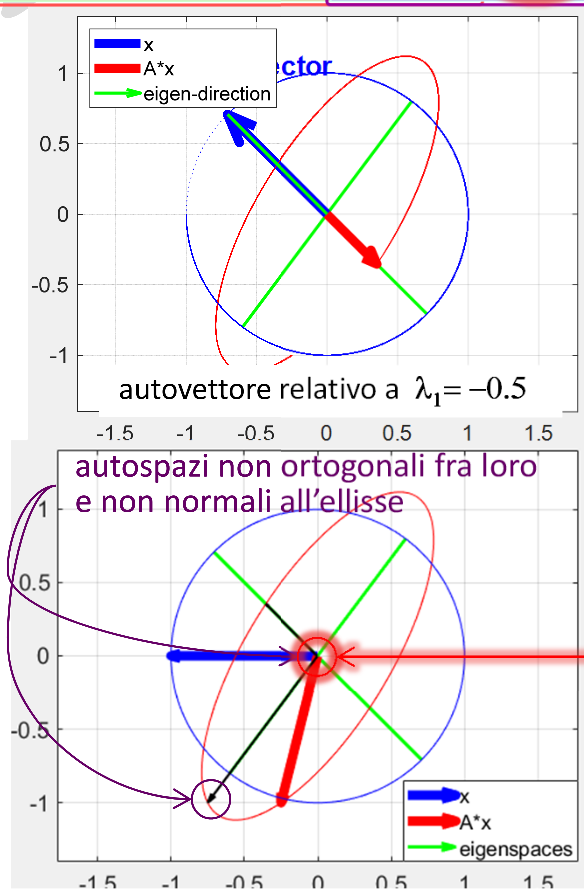
Esempio: download `eigenvectors.p` (autovettori di una matrice)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

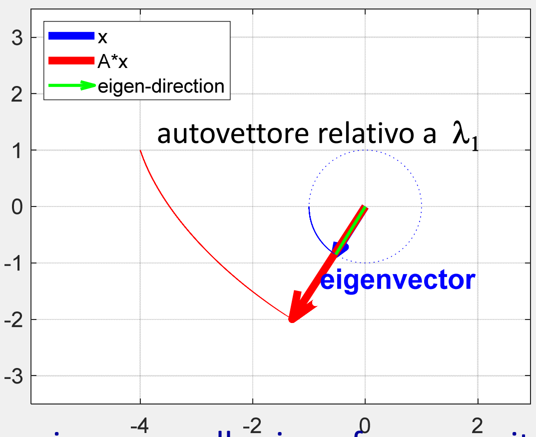
```
A=[1/4 3/4;1 1/2];
[V,D]=eig(A,'vector')
V =
   -0.70711       -0.6
    0.70711       -0.8
D =
    -0.5   λ1
    1.25   λ2
```

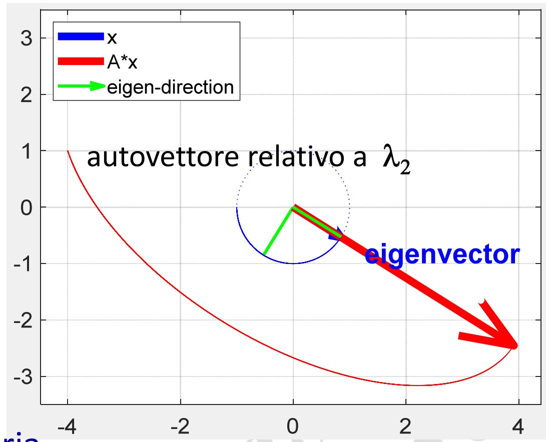
```
subspace( ...
V(:,1), ...
V(:,2))*180/pi
ans =
   81.87
```



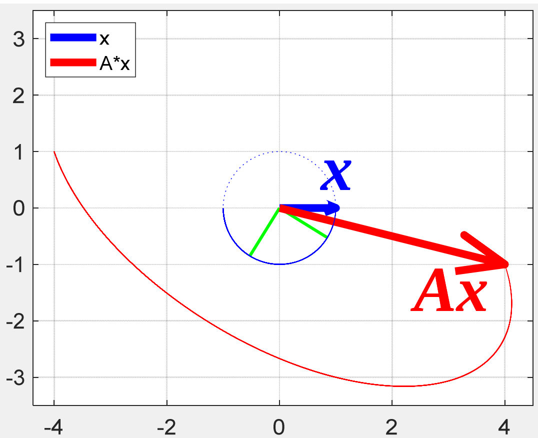


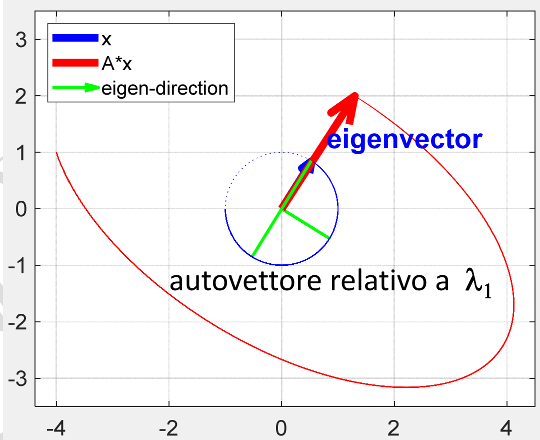
Esempio: download `eigenvectors.p` (autovettori di una matrice)

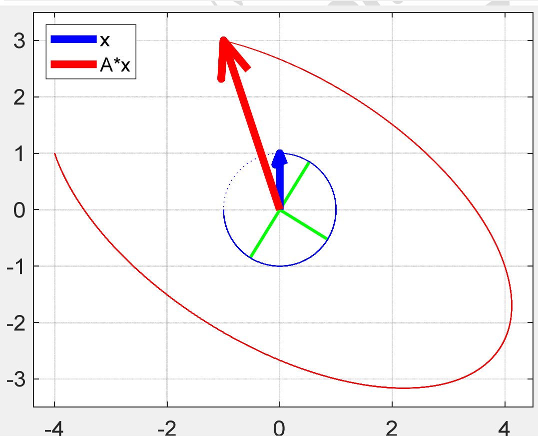


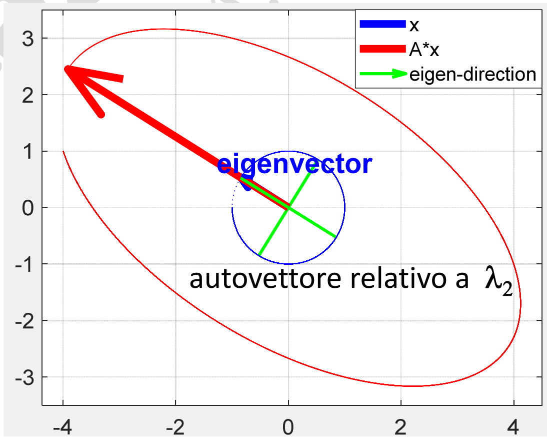


x si muove sulla circonferenza unitaria









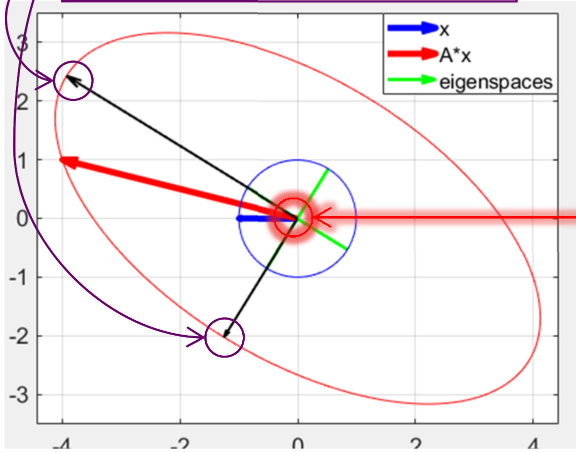
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$ simmetrica

matrice definita positiva

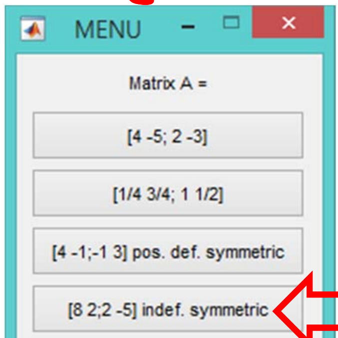
```
A=[4 -1;-1 3];
[V,D]=eig(A ,'vector')
V =
   -0.52573    -0.85065
   -0.85065     0.52573
D =
         2.382  λ1
         4.618  λ2
```

```
subspace( ...
V(:,1), ...
V(:,2))*180/pi
ans =
    90
```

autospazi ortogonali fra loro
e normali all'ellisse



Esempio: download `eigenvectors.p` (autovettori di una matrice)



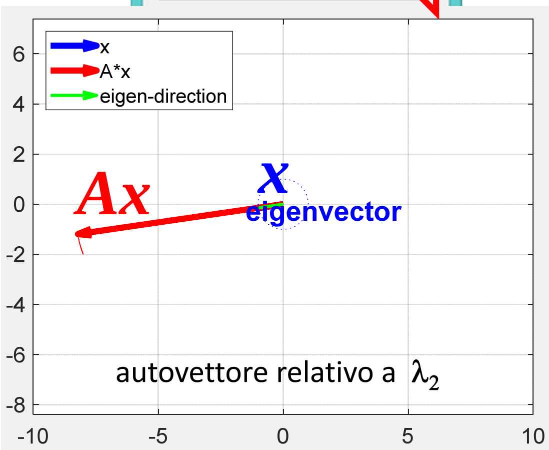

```
>> eigenvectors
```

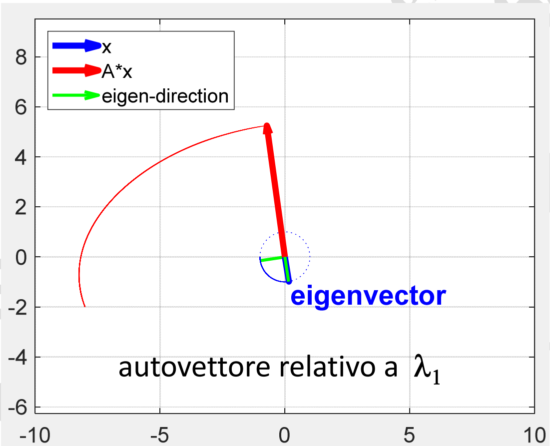
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$ simmetrica

matrice indefinita

```
A=[8 2;2 -5];
[V,D]=eig(A,'vector')
V =
     0.1487    -0.98888
   -0.98888    -0.1487
D =
   -5.3007  λ1
    8.3007  λ2
```

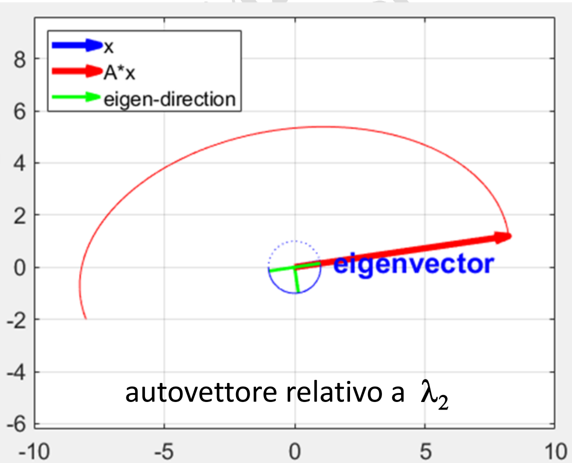
```
subspace( ...
V(:,1), ...
V(:,2))*180/pi
ans =
       90
```

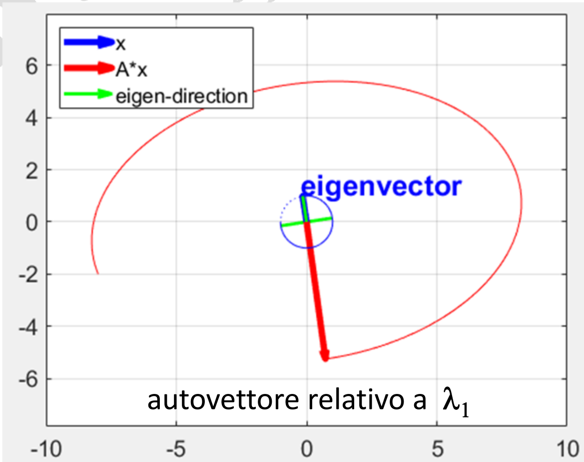


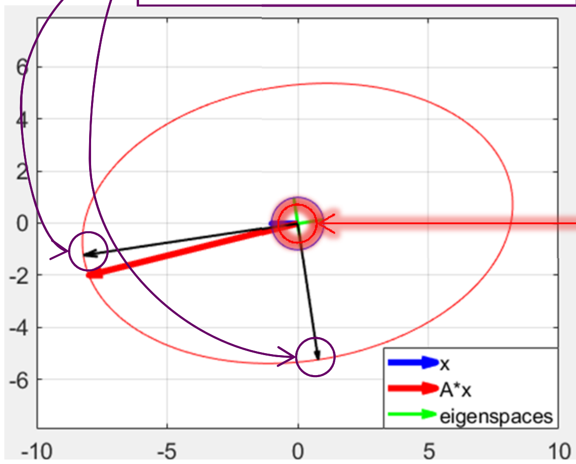


x si muove sulla circonferenza unitaria

autospazi ortogonali fra loro
e normali all'ellisse







Matrice simmetrica e la sua ellisse

Una matrice simmetrica A può essere:

- definita positiva ($x^T A x > 0$): $\lambda_k > 0$,
- semidefinita positiva ($x^T A x \geq 0$): $\lambda_k \geq 0$,
- definita negativa ($x^T A x < 0$): $\lambda_k < 0$,
- semidefinita negativa ($x^T A x \leq 0$): $\lambda_k \leq 0$,
- indefinita (altrimenti).

```
A=...; [V,D]=eig(A,'vector')
...
t=linspace(-pi,pi,201); x=[cos(t);sin(t)]; Ax=A*x;
plot(Ax(1,:),Ax(2,:),'k'); axis equal; grid on; hold on
quiver(0,0,V(1,1),V(2,1),abs(D(1)),'Color','b','LineWidth',2)
quiver(0,0,V(1,2),V(2,2),abs(D(2)),'Color','r','LineWidth',2)
```

fattore di scala

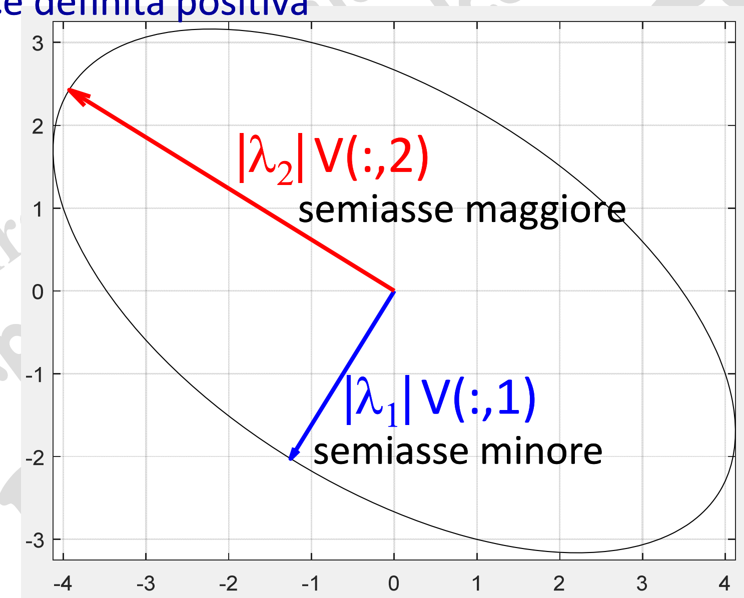
simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
V =
  -0.52573   -0.85065
  -0.85065    0.52573
D =
   2.382
   4.618
```

autovalori positivi

matrice definita positiva

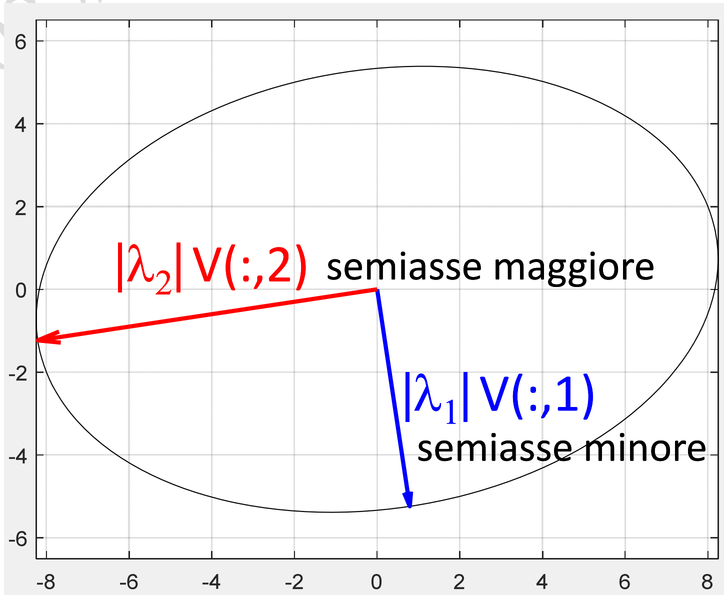


simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

```
V =
   0.1487    -0.98888
  -0.98888   -0.1487
D =
  -5.3007
   8.3007
```

matrice indefinita



Autovalori di particolari matrici simmetriche:

$A^{\mathsf{T}}A$, AA^{T}

$A_{m\times n}$, $m > n$ → $A^{\mathsf{T}}_{n\times m}$ → $A^{\mathsf{T}}\cdot A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $A\cdot A^{\mathsf{T}}\vec{y} = \gamma\vec{y}$

$n\times n$ A_1 $m\times m$ A_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 0; 5 -3;3 1;-1 2];
disp(rank(A))
2
A1=A'*A
A1 =
     36    -14
    -14     14
disp(rank(A1))
2
[V1,d1]=eig(A1,'vector')
V1 =
   -0.4371   -0.8994
   -0.8994    0.4371
d1 =
    7.1955
   42.8045
```

$A^{\mathsf{T}}\cdot A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ A_1

$A^{\mathsf{T}}\cdot A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$A\cdot A^{\mathsf{T}}\vec{y} = \gamma\vec{y}$

gli autovalori
non nulli
sono uguali

```
A2=A*A'
A2 =
     1      5      3     -1
     5     34     12    -11
     3     12     10     -1
    -1    -11     -1      5
disp(rank(A2))
2
[V2,d2]=eig(A2,'vector')
V2 =
  -0.9770   -0.0003    0.1630   -0.1375
   0.0932   -0.4082   -0.1911   -0.8878
   0.1860    0.4083    0.8242   -0.3456
   0.0468   -0.8165    0.5076    0.2711
d2 =
   0.00
   0.00
   7.1955
  42.8045
```

$A\cdot A^{\mathsf{T}}\vec{y} = \gamma\vec{y}$ A_2

$A_{m\times n}$, $\boxed{m>n}$ rank(A)=n $\Rightarrow$ $A^{\mathsf T}_{n\times m}$ $\Rightarrow$ $A^{\mathsf T}\cdot A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ ($n\times n$) $A\cdot A^{\mathsf T}\vec{y}=\gamma\vec{y}$ ($m\times m$)

Proprietà

spettro $\sigma([A\,A^{\mathsf T}]_{m\times m})=$ spettro $\sigma([A^{\mathsf T}A]_{n\times n})\cup\{0\}$

Dimostrazione

1) Sia λ un qualsiasi autovalore di $A^{\mathsf T}A$ ed x un suo autovettore:

$$A^{\mathsf T}Ax=\lambda x$$

Premoltiplicando per A: $A(A^{\mathsf T}Ax)=A(\lambda x)$ si ha

$$AA^{\mathsf T}(Ax)=\lambda(Ax)$$

cioè λ è anche autovalore di $AA^{\mathsf T}$ ed il relativo autovettore è Ax

$$\Rightarrow\quad \sigma([A^{\mathsf T}\cdot A]_{n\times n})\subseteq\sigma([A\cdot A^{\mathsf T}]_{m\times m})$$

2) Viceversa, sia $\gamma\neq 0$ un autovalore di $AA^{\mathsf T}$ ed y il relativo auto-vettore: $AA^{\mathsf T}y=\gamma y$

Premoltiplicando per $A^{\mathsf T}$: allora $A^{\mathsf T}A(A^{\mathsf T}y)=\gamma(A^{\mathsf T}y)$, cioè γ è anche autovalore di $A^{\mathsf T}A$ e il relativo autovettore è $A^{\mathsf T}y$

$$\Rightarrow\quad \sigma([A\cdot A^{\mathsf T}]_{m\times m})-\{0\}\subseteq\sigma([A^{\mathsf T}A]_{n\times n})$$

Esempi di autovalori/autovettori di trasform. lineari 2D: rotazione

$$Ax = \lambda x$$

```
syms th real; A=[cos(th) -sin(th);sin(th) cos(th)]
A =
[cos(th), -sin(th)]
[sin(th),  cos(th)]
syms lambda; B=A-lambda*eye(2);
d=simplify(det(B))
d =
lambda^2 - 2*cos(th)*lambda + 1
S=simplify(solve(d,lambda),10)
S =
cos(th) + (cos(th)^2 - 1)^(1/2)
cos(th) - (cos(th)^2 - 1)^(1/2)
```

matrice di rotazione 2D

```
d=simplify(charpoly(A,lambda))
```

$\cos(\theta)^2 - 1 \le 0$

```
[V,D]=eig(A)
V =
[(cos(th)-sin(th)*1i)/sin(th)-cos(th)/sin(th),
   (cos(th)+sin(th)*1i)/sin(th)-cos(th)/sin(th)]
[1,                                           1]
D =
[cos(th) - sin(th)*1i,                  0]
[                   0, cos(th) + sin(th)*1i]
```

autovalori complessi, ad eccezione di $\cos(\theta) = \pm 1$, cioè per $\theta=0$ o $\theta=\pi$

Infatti, in generale, non esistono direzioni reali che rimangono immutate dopo la rotazione del piano.

$\theta=0$ ⇒ Trasform. identica ⇒ $\lambda=1$ ed autospazio$=\mathbb{R}^2$

tutti i vettori in $\mathbb{R}^2$ rimangono immutati

$\theta=\pi$ ⇒ Simmetria risp. $\mathbf{O}$ ⇒ $\lambda=-1$ ed autospazio$=\mathbb{R}^2$

ogni vettore in $\mathbb{R}^2$ si trasforma nel suo opposto; ma l'autospazio rimane lo stesso

Esempi di autovalori/autovettori di trasform. lineari 2D: simmetria ortogonale rispetto all'asse x

```
A=[1 0;0 -1];
syms lambda; B=A-lambda*eye(2);
d=simplify(det(B))
d =
lambda^2 - 1
S=simplify(solve(d,lambda),10)
S =
-1
 1
```

```
d=simplify(charpoly(A,lambda))
```

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
[V,D]=eig(A)
V =
     0     1
     1     0
D =
    -1     0
     0     1
```

λ_k

$\lambda = 1$ ⇨ autospazio=asse x ⇨

solo i vettori sull'asse x rimangono gli stessi

```
B1=subs(B,lambda,1);
N1=null(B1)
N1 =
1
0
```

$\lambda = -1$ ⇨ autospazio=asse y ⇨

```
B2=subs(B,lambda,-1);
N2=null(B2)
N2 =
0
1
```

solo i vettori sull'asse y si trasformano nei loro opposti, ma l'autospazio rimane lo stesso

Esempi di autovalori/autovettori di trasform. lineari 2D:

simmetria ortogonale rispetto alla retta $r=\text{span}\{\underline{a}\}=\text{span}\{(2,1)^T\}$

$$y=t_A(x)=\left[\frac{2}{\|a\|^2}aa^T-I_2\right]x=\left[\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]x=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}x$$

```
a=[2 1]';
A=2/norm(a)^2*a*a' - eye(2);
syms lambda; B=A-lambda*eye(2);
d=simplify(det(B))
d =
lambda^2 - 1
S=simplify(solve(d,lambda),10)
S =
-1
 1
```
autovalori

```
B1=subs(B,lambda,1);
N1=null(B1)
N1 =
2
1
```
base autospazio di $\lambda=1$

```
B2=subs(B,lambda,-1);
N2=null(B2)
N2 =
-1/2
   1
```
base autospazio di $\lambda=-1$

```
[V,D]=eig(sym(A))
V =
[2, -1/2]
[1,    1]
D =
[1,  0]
[0, -1]
```

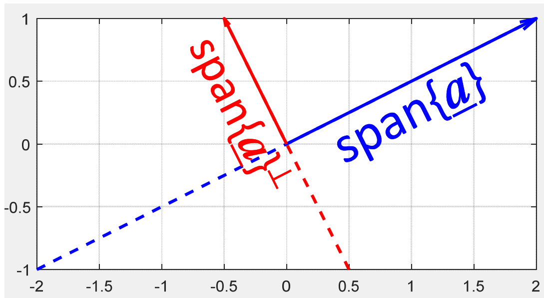
$$\boxed{Ax=\lambda x}$$

$\lambda=1$ ⇒ autospazio = span{**a**}

solo i vettori sull'asse di simmetria rimangono immutati

$\lambda=-1$ ⇒ autospazio = span{**a**}$^\perp$

solo i vettori su span{**a**}$^\perp$ si trasformano nei loro opposti, ma l'autospazio rimane lo stesso



Gli autovalori di una simmetria ortogonale 2D rispetto a una retta generica $\boldsymbol{r}=\text{span}\{\underline{\boldsymbol{a}}\}$ sono sempre $\lambda=\pm 1$

Dimostrazione

Sia $\underline{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; allora la simmetria ortogonale rispetto a $\boldsymbol{r}=\text{span}\{\underline{\boldsymbol{a}}\}$ è:

$$y=t_A(x)=\underbrace{\left[\frac{2}{\|a\|^2}aa^T-I_2\right]}_{A}x=\begin{pmatrix} \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2} & \frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} \\ \frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} & -\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2} \end{pmatrix}x$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}-\lambda & \frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} \\ \frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} & -\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-\left[\left(\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)^2+\left(\frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)^2\right]=\lambda^2-1$$

```
syms a [2 1] real;  A=simplify(2/norm(a)^2*a*a' - eye(numel(a)))
A =
[(a1^2 - a2^2)/(a1^2 + a2^2),      (2*a1*a2)/(a1^2 + a2^2)]
[    (2*a1*a2)/(a1^2 + a2^2), -(a1^2 - a2^2)/(a1^2 + a2^2)]
p=simplify(charpoly(A))
p =
[1, 0, -1]
disp(roots(p))
-1
 1
```

```
syms x real
Px=charpoly(A,x)
Px =
x^2 - 1
```

Gli autovalori sono sempre $\lambda=\pm 1$

(prof. M. Rizzardi)

Gli autospazi di una simmetria ortogonale 2D rispetto a una retta generica $\boldsymbol{r} = \text{span}\{\underline{a}\}$ sono: $\text{span}\{\underline{a}\}$ e $\text{span}\{\underline{a}\}^{\perp}$

Dimostrazione

L'autospazio V_1 relativo a $\lambda = +1$ è dato da:

$$A - \lambda I|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} - 1 & \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} & -\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}(A - 1I) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\}$$

```
…
syms lambda; B=A-lambda*eye(2)
B1=subs(B,lambda,1); N1=null(B1)
N1 =
a1/a2
    1
```

base autospazio per $\lambda=1$

L'autospazio V_2 relativo a $\lambda = -1$ è dato da:

$$A - \lambda I|_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} + 1 & \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} & -\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} + 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}(A + 1I) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\} = V_1^{\perp}$$

```
B2=subs(B,lambda,-1); N2=null(B2)
N2 =
-a2/a1
    1
```

base autospazio per $\lambda=-1$
ortogonale a N1

Esempi di autovalori/autovettori di traform. lineari 3D: proiezione ortogonale sul piano $\pi=\mathrm{span}\{(1,0,1)^T, (1,1,0)^T\}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \pi=\mathscr{R}(A)$$

colonne **non** ortonormali

$$y=\boxed{A\left(A^T A\right)^{-1} A^T}x$$

matrice di proiezione P⊥

colonne ortonormali

$$y=\boxed{UU^T}x$$

matrice di proiezione P⊥

```
A=[1 0 1; 1 1 0]';
[Q,~]=qr(A,0); P1=Q*Q'
P1 =
   0.66667   0.33333   0.33333
   0.33333   0.66667  -0.33333
   0.33333  -0.33333   0.66667
O=orth(A); P2=O*O'
P2 =
   0.66667   0.33333   0.33333
   0.33333   0.66667  -0.33333
   0.33333  -0.33333   0.66667
```

P1, **P2** sono matrici singolari

È preferibile passare ad una base ortonormale per il piano π: in tal modo si può usare la formula semplificata per la matrice di proiezione P⊥.

$$\boxed{Ax=\lambda x}$$

```
[V,D] = eig(sym(P2))
V =
[ -1, 1, 1]
[  1, 1, 0]
[  1, 0, 1]
D =
[ 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
```

L'endomorfismo ha un autovalore doppio: $\lambda_1=1$ (collegato ai vettori che rimangono fissi) ed il corrispondente autospazio è il piano stesso $\mathscr{R}(A)$.

Esercizi

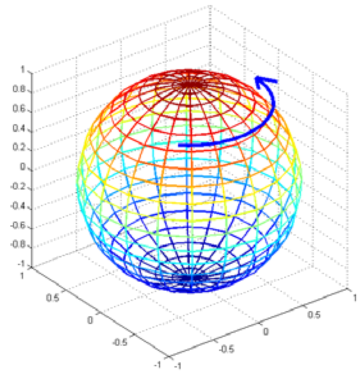
Trovare gli autovalori e gli autospazi della simmetria ortogonale 3D rispetto alla retta

$$\boldsymbol{r} = \text{span}\{(2,1,1)^{\mathsf{T}}\}.$$

Anche mediante il *Symbolic Math Toolbox*, trovare gli autovalori e gli autospazi della simmetria ortogonale 3D rispetto ad una retta generica $\boldsymbol{r}=\text{span}\{\underline{\boldsymbol{a}}\}$ dove $\underline{\boldsymbol{a}}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathsf{T}}$.

Suggerimento: sfruttare la forma matriciale della trasformazione

Anche mediante il *Symbolic Math Toolbox*, trovare gli autovalori reali e gli autospazi della rotazione 3D attorno all'asse z.



Diagonalizzazione di matrici

Due matrici quadrate, di size n, A e B sono dette "**simili**" se esiste una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1}AS$ (S: matrice di similitudine).

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori.

In generale, una matrice $A_{(n\times n)}$ è "diagonalizzabile" se ammette n autovettori linearmente indipendenti, che possono formare una base di $\mathbb{R}^n$, e che costituiscono le colonne di S.

Ciò capita, per esempio, se tutti gli autovalori di A sono diversi.

Criterio di diagonalizzabilità

$A_{(n\times n)}$ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $\nu(\lambda) = \mu(\lambda),\ \forall\lambda$

molteplicità algebrica **molteplicità geometrica**

Sono equivalenti:

(1) $A_{(n\times n)}$ è "diagonalizzabile".
(2) la somma delle molteplicità geometriche è uguale a n.
(3) $\nu(\lambda) = \mu(\lambda),\ \forall\lambda$.

Diagonalizzazione di una matrice: esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad t_A : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^2$$

autovalori: $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 5/4$ (radici semplici del polinomio caratteristico)

autospazi: $V_{\lambda_1} = \text{span}\{(-1,1)^T\}$

$V_{\lambda_2} = \text{span}\{(3,4)^T\}$

$\nu(\lambda_1) = \mu(\lambda_1)$
$\nu(\lambda_2) = \mu(\lambda_2)$ $\Rightarrow$ $S = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Poiché i 2 autovettori sono linearmente indipendenti, possono formare una nuova base di $\mathbb{R}^2$: quindi ogni vettore x si può esprimere come

$$x = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = S\underline{\alpha}$$

$$\Rightarrow t_A(x) = Ax = AS\underline{\alpha} = \alpha_1 A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad = \alpha_1 \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = S\Lambda\underline{\alpha}$$

risp. alla nuova base di $\mathbb{R}^2$ in S, la trasform. t_A diventa uno scaling non uniforme

$$t_A : x \in \mathbb{R}^n, x = S\boxed{\underline{\alpha}} \longrightarrow t_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^n, t_A(x) = AS\underline{\alpha} = S\boxed{\Lambda\underline{\alpha}}$$

$\Leftrightarrow$ $\Lambda = S^{-1} A S$ $\quad$ A è stata diagonalizzata da S

Diagonalizzazione di matrici: esempi MATLAB

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$ non simmetrica

numerico

```
A=[1/4 3/4;1 1/2]
A =
      0.25          0.75
         1           0.5
P=charpoly(A)
P =
 1   -0.75   -0.625
w=roots(P)
w =
          1.25
          -0.5
V1=null(A-w(1)*eye(2))
V1 =
           0.6
           0.8
V2=null(A-w(2)*eye(2))
V2 =
  -0.70711
   0.70711
S=[V1 V2];
inv(S)*A*S
ans =
 1.25   -2.22e-16
-2.77e-17   -0.5
```

V1, V2 normalizzati ma non ortogonali

simbolico

```
A=sym(A)
A =
[1/4, 3/4]
[  1, 1/2]
P=charpoly(A)
P =
[1, -3/4, -5/8]
w=roots(P)
w =
-1/2
 5/4
V1=null(A-w(1)*eye(2))
V1 =
-1
 1
V2=null(A-w(2)*eye(2))
V2 =
3/4
  1
S=[V1 V2];
inv(S)*A*S
ans =
[-1/2,    0]
[   0,  5/4]
```

V1, V2 nè normalizzati nè ortogonali

polinomio caratteristico

autovalori

autovettori

S matrice diagonalizzante

S\A*S

diagonalizzazione

```
[S,d]=eig(A,'vector');
inv(S)*A*S
ans =
          -0.5    2.7756e-17
    1.1102e-16          1.25
```

```
[S,D]=eig(A);
inv(S)*A*S
ans =
[-1/2,    0]
[   0,  5/4]
```

matrice diagonale

(prof. M. Rizzardi)

* Una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile.

* **Teorema Spettrale** per matrici reali simmetriche

Sia A una matrice reale $n \times n$. Allora A è simmetrica se, e solo se, essa è diagonalizzabile con una matrice ortogonale, cioè:

$$\exists Q \; : \; Q^{-1}AQ = \Lambda \quad \text{dove } \Lambda \text{ è diagonale e } Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}} = I$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\Lambda = Q^{\mathrm{T}}AQ}$$

non è più necessario calcolare la matrice inversa

cioè: "se A è una matrice reale simmetrica, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita dagli autovettori di A"

Per trovare Q:

- calcolare gli autovalori e gli autovettori di A;
- costruire la matrice diagonalizzante S avente gli autovettori di A come colonne;
- calcolare Q ortonormalizzando cols di S: $\begin{cases} \text{a) calcolare la fattorizzazione } S = QR; \\ \text{b) applicare l'ortonorm. Gram-Schmidt.} \end{cases}$
- Q è la matrice ortogonale diagonalizzante.

Diagonalizzazione di matrici: esempi MATLAB

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$ simmetrica

numerico

```
A=[5 4;4 5]
A =
     5     4
     4     5
P=charpoly(A)
P =
 1   -10   9
w=roots(P)
w =
     9
     1
V1=null(A-w(1)*eye(2))
V1 =
   0.70711
   0.70711
V2=null(A-w(2)*eye(2))
V2 =
  -0.70711
   0.70711
V=[V1 V2];
inv(V)*A*V
ans =
     9     0
     0     1
V'*A*V
ans =
     9     0
     0     1
```

V1, V2 ortonormali

simbolico

```
A=sym(A)
A =
[5, 4]
[4, 5]
P=charpoly(A)
P =
[1, -10, 9]
w=roots(P)
w =
1
9
V1=null(A-w(1)*eye(2))
V1 =
-1
 1
V2=null(A-w(2)*eye(2))
V2 =
1
1
V=[V1 V2];
inv(V)*A*V
ans =
[1, 0]
[0, 9]
V'*A*V
ans =
[2,  0]
[0, 18]
```

V1, V2 non normalizzati ma ortogonali fra loro

```
O=orth(V);
O'*A*O
ans =
[1, 0]
[0, 9]
```

polinomio caratteristico

autovalori

autovettori

V matrice diagonalizzante

V\A*V

diagonalizzazione

```
[V,d]=eig(A,'vector');
V'*A*V
ans =
     1     0
     0     9
```

matrice diagonale

```
[V,D]=eig(A);
V'*A*V
ans =
[2,  0]
[0, 18]
```

Perché 2 volte gli autovalori?

Diagonalizzazione di matrici: MATLAB `eig()`

non simmetrica

```
A=[1/4 3/4;1 1/2];
[V, D] = eig(A)
V =
      -0.70711      -0.6
       0.70711      -0.8
D =
          -0.5         0
             0      1.25
disp(V'*V)
             1  -0.14142
   -0.14142            1
disp(V*V')
          0.86     -0.02
         -0.02      1.14
disp(inv(V)*A*V)
          -0.5  2.7756e-17
   1.1102e-16        1.25
```

```
disp(vecnorm(V))
           1         1
```

Per una matrice non simmetrica, la funzione numerica **`eig`** restituisce **V** come matrice non ortogonale, con le colonne normalizzate

simmetrica

```
A=[5 4;4 5];
[V, D] = eig(A)
V =
      -0.70711      0.70711
       0.70711      0.70711
D =
         1      0
         0      9
disp(V'*V)
             1            0
             0            1
disp(V*V')
             1            0
             0            1
disp(V'*A*V)
             1            0
             0            9
```

Per una matrice simmetrica, la funzione numerica **`eig`** restituisce **V** come matrice ortogonale

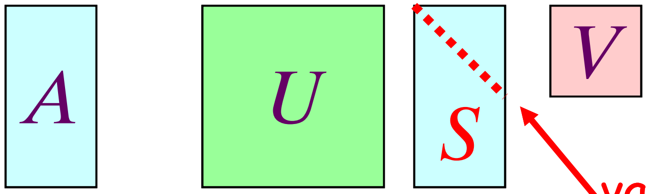
Esercizio

Sono le seguenti trasformazioni **diagonalizzabili**?

- Uno shear orizzontale come: $A = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, r=2
- Una rotazione come: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Una proiezione ortogonale come: $A = \frac{1}{\|a\|^2} aa^{\mathsf{T}}$, $a=[2,1]^{\mathsf{T}}$

Singular Value Decomposition di $A_{m\times n}$

$$A_{m\times n} = U_{m\times m} S_{m\times n} V^{\mathsf{T}}_{n\times n}$$



valori singolari σ_k di A

U, V matrici quadrate ortogonali reali (o unitarie complesse)

$$U^{\mathsf{T}}U = I_{m\times m}$$

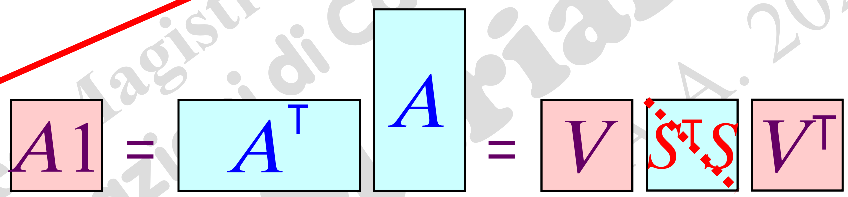
$$V^{\mathsf{T}}V = I_{n\times n}$$

MATLAB **'** è l'operatore trasposto coniugato, mentre **.'** è l'operatore trasposto

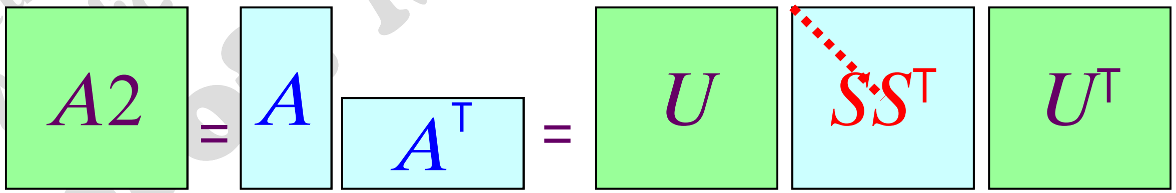
S è univocamente determinata da A

Relazione tra SVD e diagonalizzazione

$$\boxed{A1} = A^{\mathsf{T}}A = V\cdot S^{\mathsf{T}}\cdot U^{\mathsf{T}}\cdot U\cdot S\cdot V^{\mathsf{T}} = V\cdot\left(S^{\mathsf{T}}\cdot S\right)\cdot V^{\mathsf{T}}$$



simmetrica

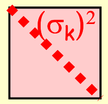


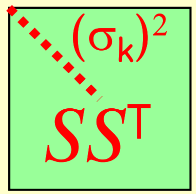
$$\boxed{A2} = A\cdot A^{\mathsf{T}} = U\cdot S\cdot V^{\mathsf{T}}\cdot V\cdot S^{\mathsf{T}}\cdot U^{\mathsf{T}} = U\cdot\left(S\cdot S^{\mathsf{T}}\right)\cdot U^{\mathsf{T}}$$

diagonalizzazione

autovettori

autovalori





Relazione tra SVD e diagonalizzazione

Esempio

$$A=\begin{pmatrix}47 & 15\\ 93 & 35\\ 53 & 15\\ 67 & 27\end{pmatrix}\qquad A^{\mathsf T}\cdot A=\begin{pmatrix}18156 & 6564\\ 6564 & 2404\end{pmatrix}\qquad A\cdot A^{\mathsf T}=\begin{pmatrix}2434 & 4896 & 2716 & 3554\\ 4896 & 9874 & 5454 & 7176\\ 2716 & 5454 & 3034 & 3956\\ 3554 & 7176 & 3956 & 5218\end{pmatrix}$$

$$A=U\cdot S\cdot V'$$

```
A=[47 15;93 35;53 15;67 27];
[U,S,V]=svd(A)
U =
  -0.34405     0.36297    -0.86528    -0.034355
  -0.69341    -0.23867     0.20137    -0.64936
  -0.38342     0.75379     0.45776     0.27433
  -0.50379    -0.49305    -0.034639    0.70845
S =
       143.29           0
            0      5.2267
            0           0
            0           0
V =
  -0.94026      0.34045
  -0.34045     -0.94026
S*S'
ans =
  20533       0       0       0
      0  27.319       0       0
      0       0       0       0
      0       0       0       0
```

```
d=diag(S); d.^2
  20533
  27.319
      0
      0
```

```
A1=A'*A;
[V1,d1]=eig(A1,'vector');
[d1,J]=sort(d1,'descend');
V1=V1(:,J);  V1, d1
V1 =
  -0.94026      0.34045
  -0.34045     -0.94026
d1 =
   20533
  27.319
```

```
A2=A*A';
[U2,d2]=eig(A2,'vector');
[d2,J]=sort(d2,'descend');
U2=U2(:,J);  U2, d2
U2 =
   0.34405   -0.36297   -0.8653    -0.033877
   0.69341    0.23867    0.14962    0.6632
   0.38342   -0.75379    0.47794   -0.23744
   0.50379    0.49305    0.021246  -0.70897
d2 =
   20533
  27.319
 -1.5793e-13
 -3.0295e-12
```

```
S'*S
ans =
  20533       0
      0  27.319
```

Applicazioni della diagonalizzazione: esempio 1

A^n: potenza n-sima di matrice

Per calcolare A^n, l'algoritmo più efficiente consiste nel diagonalizzare A, e poi calcolare la potenza come:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{pmatrix}$$

$$A = S\Lambda S^{-1} \Leftrightarrow A^n = AA\cdots A = (S\Lambda S^{-1})^n = S\Lambda^n S^{-1}$$

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z^n \end{pmatrix}$$

Dove è usata la potenza di matrice?

1a) Nelle **matrici di transizione** da uno stato all'altro di un sistema dinamico.

$$\begin{cases} x_0 \text{ stato iniziale} \\ x_{k+1} = A\,x_k \end{cases}$$

(A matrice di transizione di una catena di Markov)

Si consideri il sistema dinamico che descrive i movimenti della popolazione tra una città e la sua periferia. Sia **x=[c;s]**$\in\mathbb{R}^2$ il vettore di stato della popolazione (**c** è quella della città e **s** quella della periferia). Per semplicità, si suppone che **c+s=1**, cioè, **c** e **s** sono percentuali della popolazione totale. Si supponga che nell'anno 1900, la popolazione della città era c_0 e quella della periferia s_0, e si supponga che ogni anno il 5% della popolazione della città si sposti in periferia e il 3% della popolazione della periferia si sposti in città.
Quindi si possono calcolare le popolazioni per ogni anno successivo:

```
A=[0.95 0.03;0.05 0.97];
[c1;s1]=A*[c0;s0]; % in year 1901
[c2;s2]=A*[c1;s1]; % in year 1902
```

⇒

```
[c2;s2]=A^2*[c0;s0]; % in year 1902
 ...
[c;s]=A^100*[c0;s0]; % in year 2000
```

Applicazioni della diagonalizzazione: es. 1 (cont.)

A^n: potenza n-sima di matrice

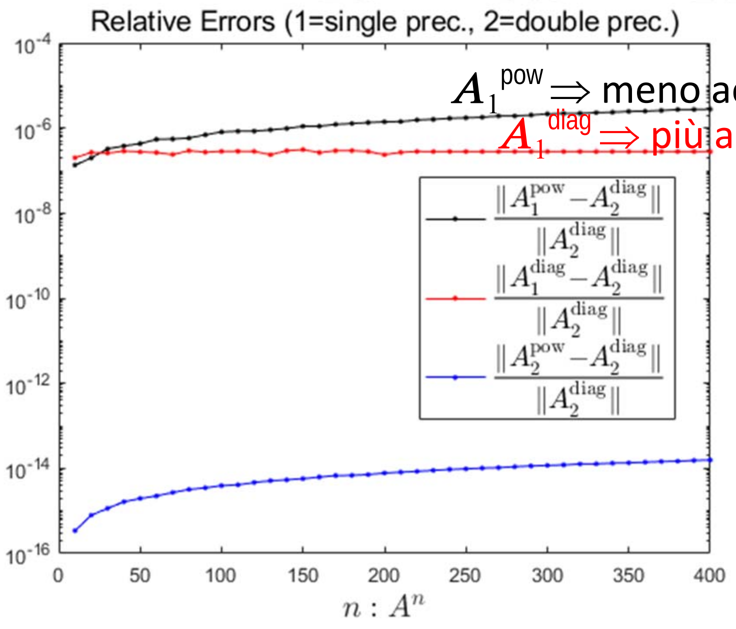

```
A2=[0.95 0.03;0.05 0.97]; % double precision
A1=single(A2);            % single precision
[V2,D2]=eig(A2);  [V1,D1]=eig(A1);
nMIN=10; nMAX=400; nSTEP=10; nVals=(nMIN:nSTEP:nMAX)';
E22=zeros(numel(nVals),1); E12diag=zeros(numel(nVals),1); E12pow=zeros(numel(nVals),1);
for k=1:numel(nVals)
    n=nVals(k);
    A2pow=A2^n; % A^n in double prec.
    A1pow=A1^n; % A^n in single prec.
    A2diag=V2*diag(diag(D2).^n)/V2; % *inv(V2)
    A1diag=V1*diag(diag(D1).^n)/V1; % *inv(V1)
    E22(k)=norm(A2pow-A2diag)/norm(A2diag);
    E12pow(k)=norm(A1pow-A2diag)/norm(A2diag);
    E12diag(k)=norm(A1diag-A2diag)/norm(A2diag);
end
figure(1); semilogy(nVals,[E12pow E12diag E22])
figure(2); plot(nVals,E12pow./E12diag)
```

$$A^n = AA \cdots A$$

$$A^n = V \Lambda^n V^{-1}$$

confronta A_1^{pow} e A_1^{diag} (singola prec.) con A_2^{diag} (doppia prec.)

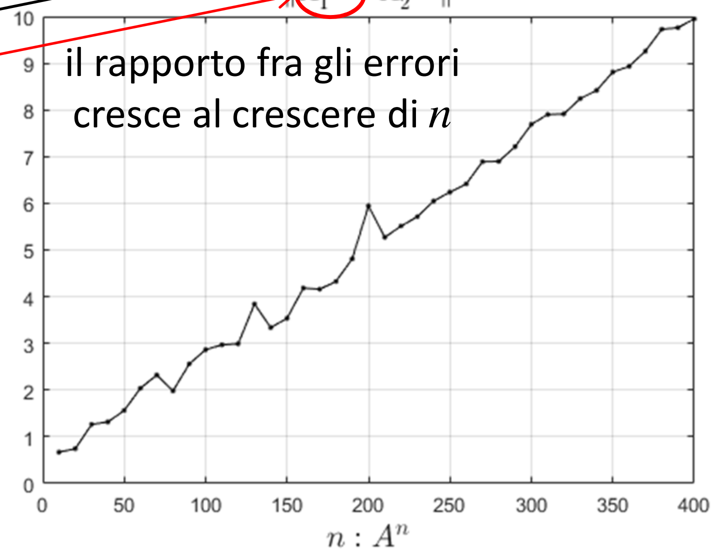
errors relativi risp. a A_2^{diag}



$A_1^{\text{pow}} \Rightarrow$ meno accurato

$A_1^{\text{diag}} \Rightarrow$ più accurato

$$\frac{\|A_1^{\text{pow}} - A_2^{\text{diag}}\|}{\|A_1^{\text{diag}} - A_2^{\text{diag}}\|}$$



il rapporto fra gli errori cresce al crescere di n

(prof. M. Rizzardi)

Applicazioni della diagonalizzazione: esempio 1

A^n: potenza n-sima di matrice

Per calcolare A^n, l'algoritmo più efficiente consiste nel diagonalizzare A, e poi calcolare la potenza come:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{pmatrix}$$

$$A = S\Lambda S^{-1} \Leftrightarrow A^n = AA\cdots A = (S\Lambda S^{-1})^n = S\Lambda^n S^{-1}$$

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z^n \end{pmatrix}$$

Dove è usata la potenza di matrice?

1b) Nella **teoria dei grafi**:

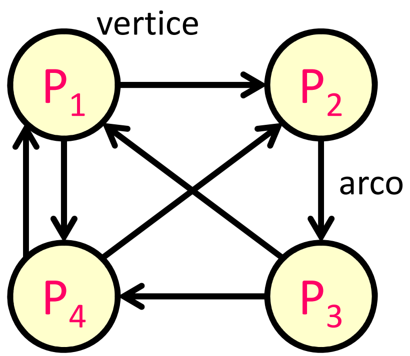
Esempio Si consideri un gruppo di n persone $P_1, P_2, \ldots, P_n$, e si costruisca un **grafo orientato** dove un arco orientato da P_i a P_j indica che P_i può inviare informazioni a P_j.
Si costruisca la matrice di adiacenze $\mathbf{A}$ del grafo:

Grafo = {vertici} ∪ {archi}

$P_1 \to P_2$, $P_1 \to P_4$
$P_2 \to P_3$
$P_3 \to P_1$, $P_3 \to P_4$
$P_4 \to P_1$, $P_4 \to P_2$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \text{da} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \text{a} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

matrice di adiacenze



Grafo orientato = archi a senso unico

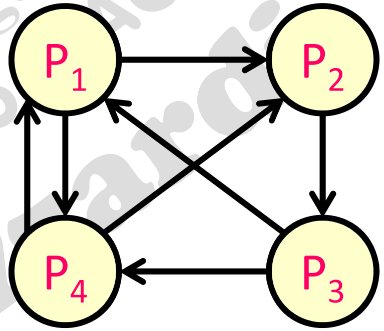
Applicazioni della diagonalizzazione: esempio 1 (cont.)

A^n: potenza n-sima di matrice

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \end{array}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}
$$

$P_1 \to P_2$, $P_1 \to P_4$
$P_2 \to P_3$
$P_3 \to P_1$, $P_3 \to P_4$
$P_4 \to P_1$, $P_4 \to P_2$



Come si può interpretare $\mathbf{A}^3$, e più in generale $\mathbf{A}^k$?

```
A=[0 1 0 1;0 0 1 0;1 0 0 1;1 1 0 0];
```

A2=A^2

A3 =

da \ a	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	1	1	2
P_2	1	2	0	1
P_3	1	2	2	1
P_4	2	1	1	1

L'elemento $\mathbf{a}_{32}$=2 in $\mathbf{A}^2$ indica che P_3 può inviare informazioni a P_2, in 2 fasi, in 2 modi diversi:

$P_3 \to P_4 \to P_2$ (fase 1 fase 2) o $P_3 \to P_1 \to P_2$ (fase 1 fase 2)

L'elemento $\mathbf{a}_{32}$=2 in $\mathbf{A}^3$ indica che P_3 può inviare informazioni a P_2, in 3 fasi, in 2 modi diversi:

$P_3 \to P_4 \to P_1 \to P_2$ o $P_3 \to P_1 \to P_4 \to P_2$

A3=A^3

A3 =

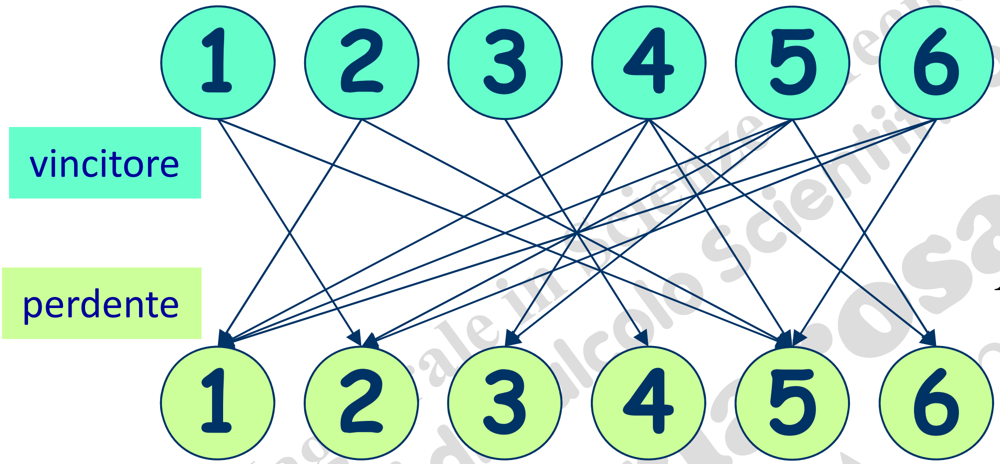
da \ a	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	1	1	2
P_2	1	2	0	1
P_3	1	2	2	1
P_4	2	1	1	1

In generale, il numero di cammini di lunghezza k da P_i a P_j è dato dall'elemento $\mathbf{a}_{ij}$ della matrice $\mathbf{A}^k$: $\mathbf{a}_{ij} = (\mathbf{A}^k)_{ij}$

In generale, il numero di modi in cui P_i può inviare informazioni a P_j in **al più k fasi** è dato dall'elemento a_{ij} della matrice: $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^k$

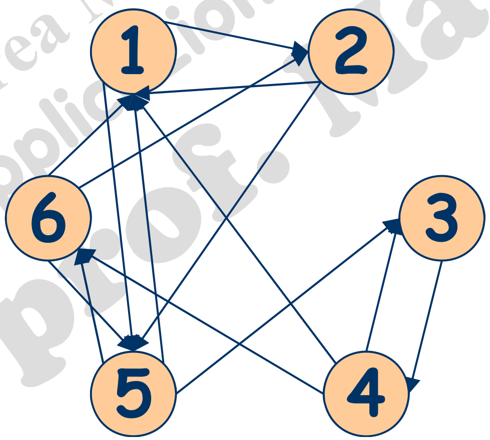
Applicazioni della diagonalizzazione: esempio 2

Si vuole calcolare la classifica delle migliori squadre di calcio in un torneo. Si formi il grafo orientato bipartito dove i vertici sono le squadre, e l'arco orientato dal vertice i a quello j indica che la squadra i ha vinto con quella j. Il grafo è rappresentato dalla sua matrice di adiacenza A (non simmetrica).



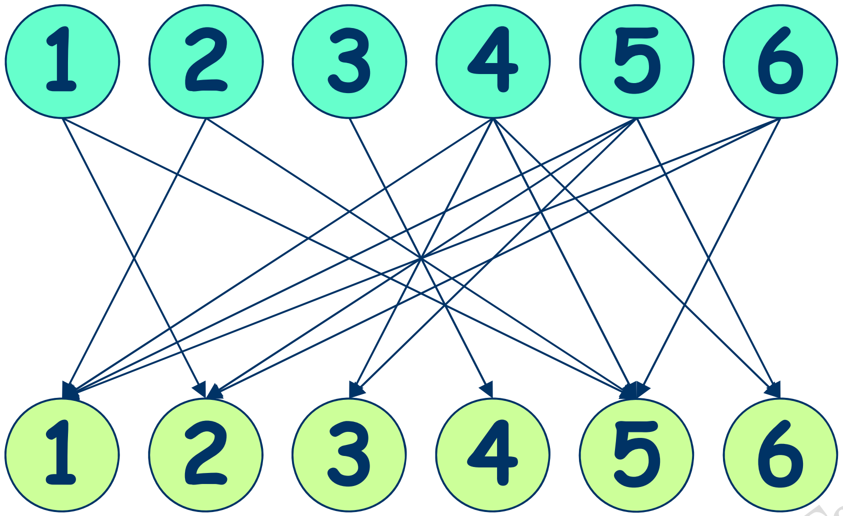
$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \;\text{vince} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

A **descrive il torneo**



James P. Keener – *The Perron-Frobenius Theorem and the ranking of football teams*. SIAM Review, 35 (1), 1993
http://stat.wharton.upenn.edu/~steele/Courses/956/Ranking/RankingFootballSIAM93.pdf

Dario A. Bini – *Il problema del PageRank*. Appunti del corso di Calcolo Scientifico (2015)
https://pagine.dm.unipi.it/bini/Didattica/CalSci/dispense/google.pdf



$$A = \begin{array}{c|c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \ \text{vince} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
\end{array}$$

```
A=[0 1 0 0 1 0 ...];
[V,d]=eig(A,'vector')
[d,J]=max(abs(d));
v=abs(V(:,J));
[v,J]=sort(v,'descend');
disp(' squadra punteggio')
disp([J v])
squadra   punteggio
   4        0.56648
   5        0.49581
   6        0.43459
   1        0.31328
   2        0.31328
   3        0.21934
```

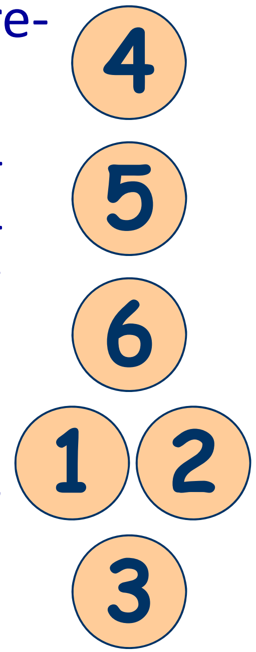
L'autovalore di A di massimo modulo è

$$\lambda=2.58...$$

ed il corrispondente autovettore rappresenta la classifica.

Si ordinano i valori assoluti delle componenti di tale autovettore in ordine decrescente, e si ottiene il punteggio di ogni squadra.

Secondo questo sistema di classifica, la squadra migliore è la 4ª, seguita dalla 5ª, 6ª, poi a pari merito la 1ª e la 2ª, e per ultima la 3ª.



Se si cambia la matrice di adiacenza in modo che l'elemento A_{ij} denoti la differenza reti (>0), è quindi possibile sfruttare ulteriori informazioni che portano a cambiare la classifica.

$$
A = \begin{array}{c|c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \text{ vince} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
\end{array}
$$

```
A=[0 1 0 0 1 0 ...];
[V,d]=eig(A,'vector')
[d,J]=max(abs(d));
v=abs(V(:,J));
[v,J]=sort(v,'descend');
disp(' squadra punteggio')
disp([J v])
squadra   punteggio
   5        0.60052
   4        0.50336
   6        0.41068
   2        0.30689
   1        0.30689
   3        0.17024
```

ora
5
4
6
1
2
3

Tenendo conto della differenza reti, la classifica è cambiata.

prima
4
5
6
1, 2
3

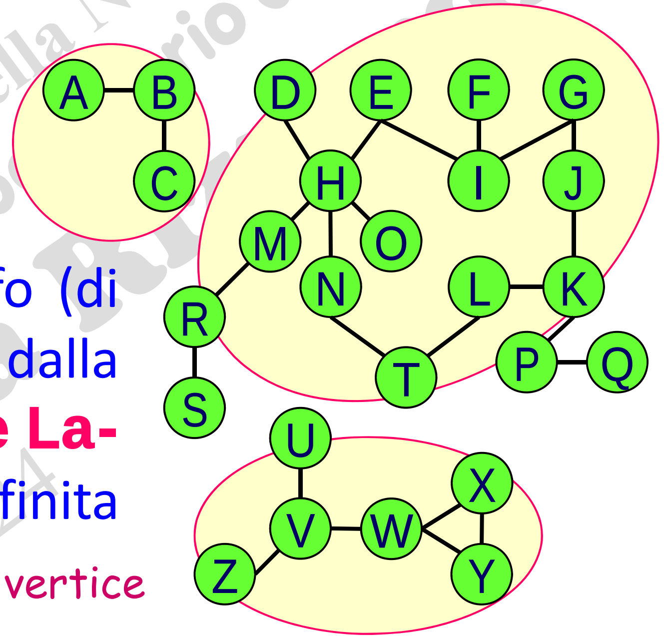
Applicazioni della diagonalizzazione: esempio 3

Determinare il numero di

componenti connesse

in un grafo

3 componenti connesse



Il numero di componenti connesse di un grafo (di vertici V_k, ed insieme di archi E) è dato dalla molteplicità dell'autovalore $\lambda=0$ della **matrice Laplaciana** L (o **matrice di Kirchhoff**), definita come

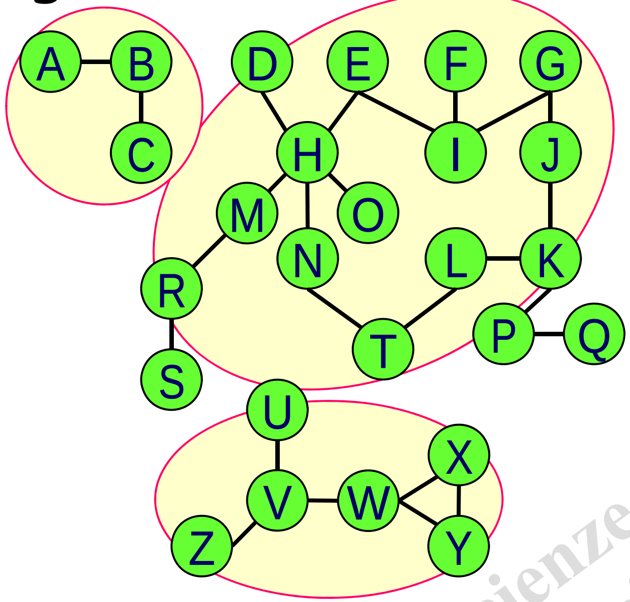
grado del vertice

$$L = (\ell_{ij}) = \begin{cases} \deg(V_i) & i = j \\ -1 & i \neq j \wedge (V_i, V_j) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

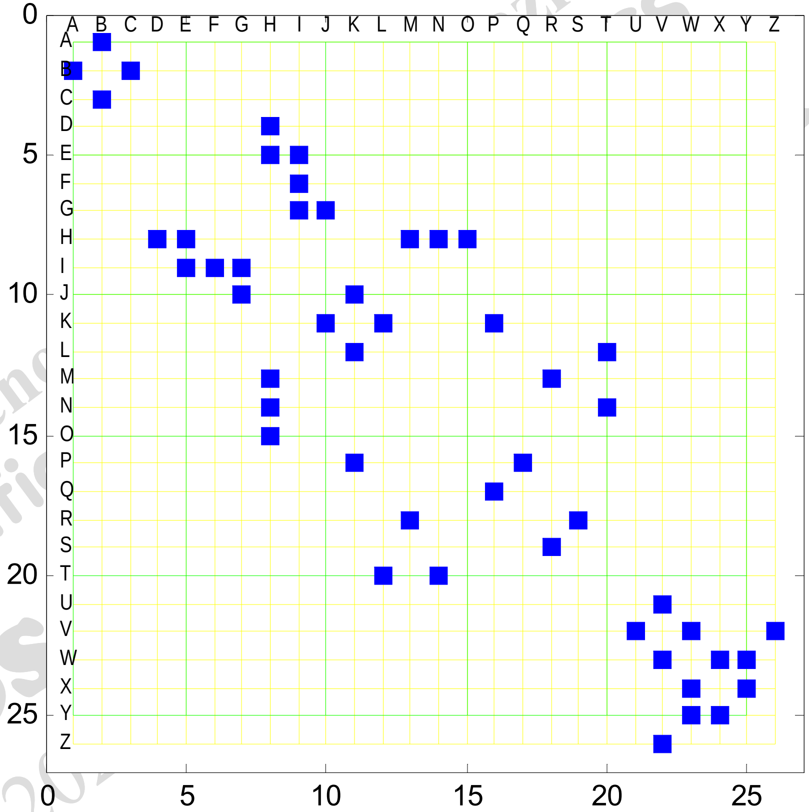
grado di un vertice: è il numero di archi incidenti nel vertice

La matrice Laplaciana L è calcolata come $L = D - A$, cioè la differenza tra la matrice dei gradi D (una matrice diagonale contenente il grado di ogni vertice - cioè, il numero degli archi attaccati ad ogni vertice) e la matrice A delle adiacenze del grafo.

grafo non orientato



matrice delle adiacenze



spy(A)

matrice simmetrica

```
A = [0 1 0 0 0 0 ...];
spy(A)
deg=diag(sum(A));
L = deg - A;
d=abs(eig(L));
J=find(d < 1e-8);
numel(J)
ans =
      3
```

trova la molteplicità algebrica dell'autovalore nullo

altrimenti

```
d=abs(eigs(L,25,'smallestabs'));
```

eigs(): sottoinsieme dei 25 autovalori più piccoli

(prof. M. Rizzardi)

Esercizio

Scrivere una funzione MATLAB per determinare il numero di componenti connesse di un grafo, data in input la sua matrice di adiacenze.

Scaricare il file `graph2.mat` per una matrice di adiacenze, oppure usarne un'altra a scelta.