# Corso di “Antenne”

## Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Biomedica e delle Telecomunicazioni

**Università degli Studi di Napoli “Parthenope”**

a.a. 2023-2024  – Laurea “Triennale” – Secondo semestre – Terzo anno

**Prof. Stefano Perna**

# Campo elettromagnetico

Perché si parla di campo elettromagnetico?

Il campo elettrico che fine ha fatto?

Il campo magnetico che fine ha fatto?

# Campo elettromagnetico

Perché si parla di campo elettromagnetico?

Il campo elettrico che fine ha fatto?

Il campo magnetico che fine ha fatto?

…. prima di rispondere, anticipiamo qualche proprietà del campo elettrico e del campo magnetico …

# Sommario

**Proprietà del campo elettrico e del campo magnetico**

Dipendenza dallo spazio e dal tempo

Sistema di riferimento

# Campo elettrico – Campo magnetico – Campo elettromagnetico

# **Campo** elettrico – **Campo** magnetico – **Campo** elettromagnetico

# <u>**Campo**</u> elettrico - <u>**Campo**</u> magnetico - <u>**Campo**</u> elettromagnetico

Il campo è una grandezza che dipende dalle coordinate dello spazio o, più generalmente, dello spaziotempo

# Campo elettromagnetico

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

Il campo elettrico è un vettore

Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** è un vettore

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

# Campo elettromagnetico

Il **campo elettrico** è un vettore

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad\qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\hat{i}_y + \mathrm{e_2}\hat{i}_z$$

# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** è un vettore

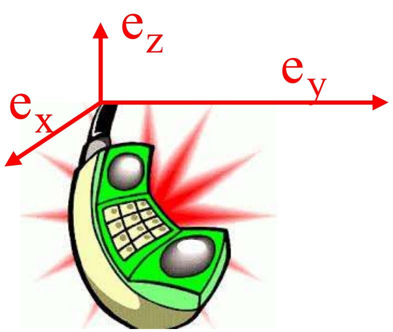
$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e}_{\mathrm{x}} \hat{i}_x + \mathrm{e}_{\mathrm{y}} \hat{i}_y + \mathrm{e}_2 \hat{i}_z$$

# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** è un vettore

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$$\vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\hat{i}_y + \mathrm{e_z}\hat{i}_z$$



# Campo elettromagnetico

Il **campo elettrico** dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** dipende dallo spazio e dal **tempo**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

# Campo elettromagnetico

## Il <u>campo elettrico</u> dipende dallo spazio e dal <u>**tempo**</u>

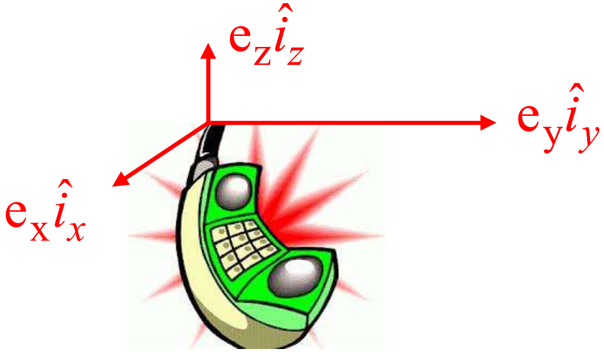
$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

# Campo elettromagnetico

## Il <u>**campo elettrico**</u> dipende dallo spazio e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\,\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\,\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\,\hat{i}_z$$

$$\boxed{t = t_1}$$

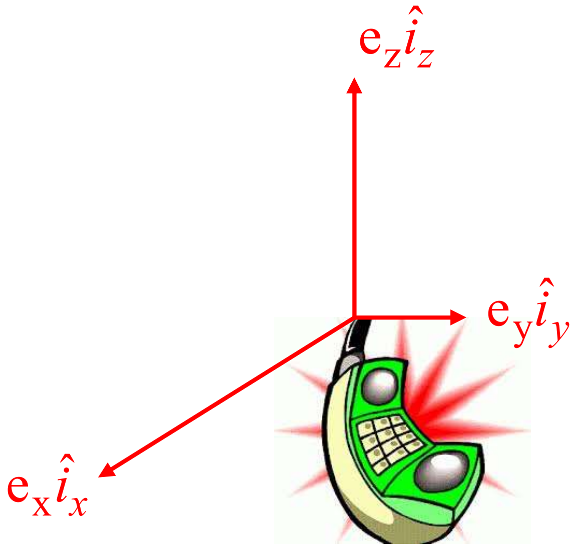


# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** dipende dallo spazio e dal **tempo**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

$$\boxed{t = t_2}$$

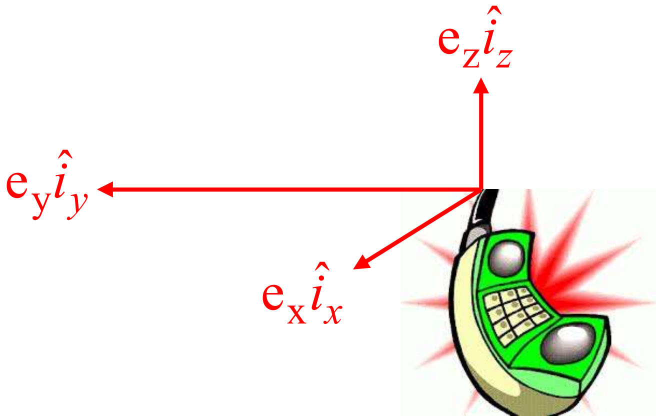


# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** dipende dallo spazio e dal **tempo**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

$$\boxed{t = t_3}$$

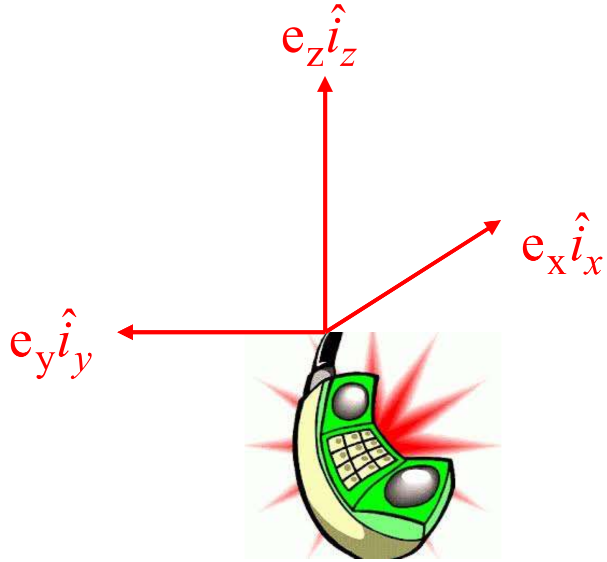


# Campo elettromagnetico

## Il <u>**campo elettrico**</u> dipende dallo spazio e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_z$$

$$\boxed{t = t_4}$$



# Campo elettromagnetico

## Il **campo elettrico** dipende dallo **spazio** e dal **tempo**

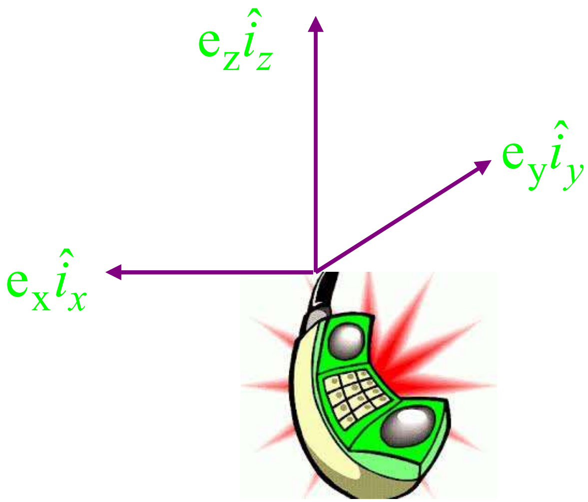
$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_z$$

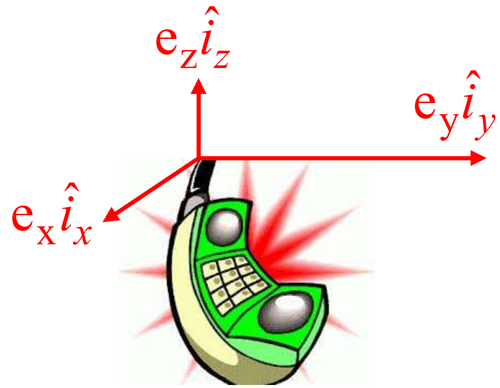
# Campo elettromagnetico

## Il <u>campo elettrico</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\,\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\,\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\,\hat{i}_z$$

$$\boxed{t = t_1}$$



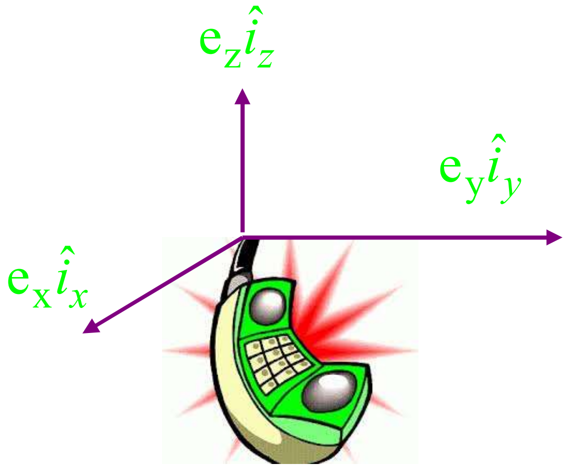



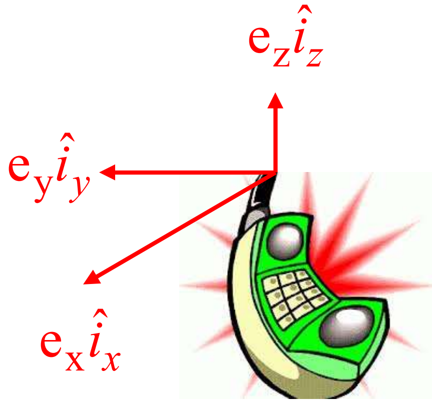
# Campo elettromagnetico

## Il <u>campo elettrico</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

$$\boxed{t = t_2}$$



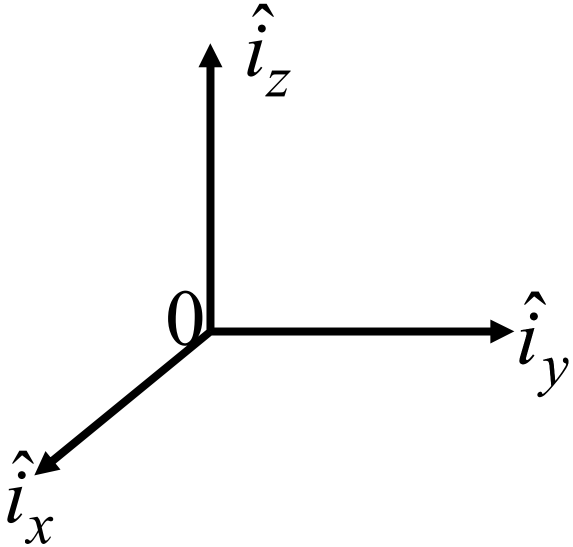
# Sommario

**Proprietà del campo elettrico e del campo magnetico**

- **Dipendenza dallo spazio e dal tempo**
- Sistema di riferimento

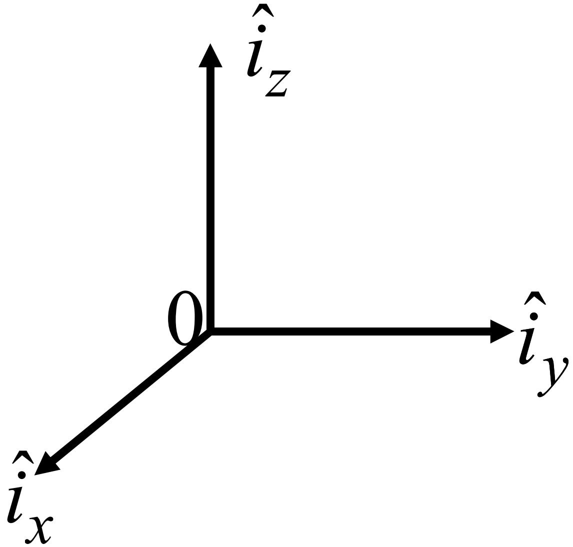
# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$



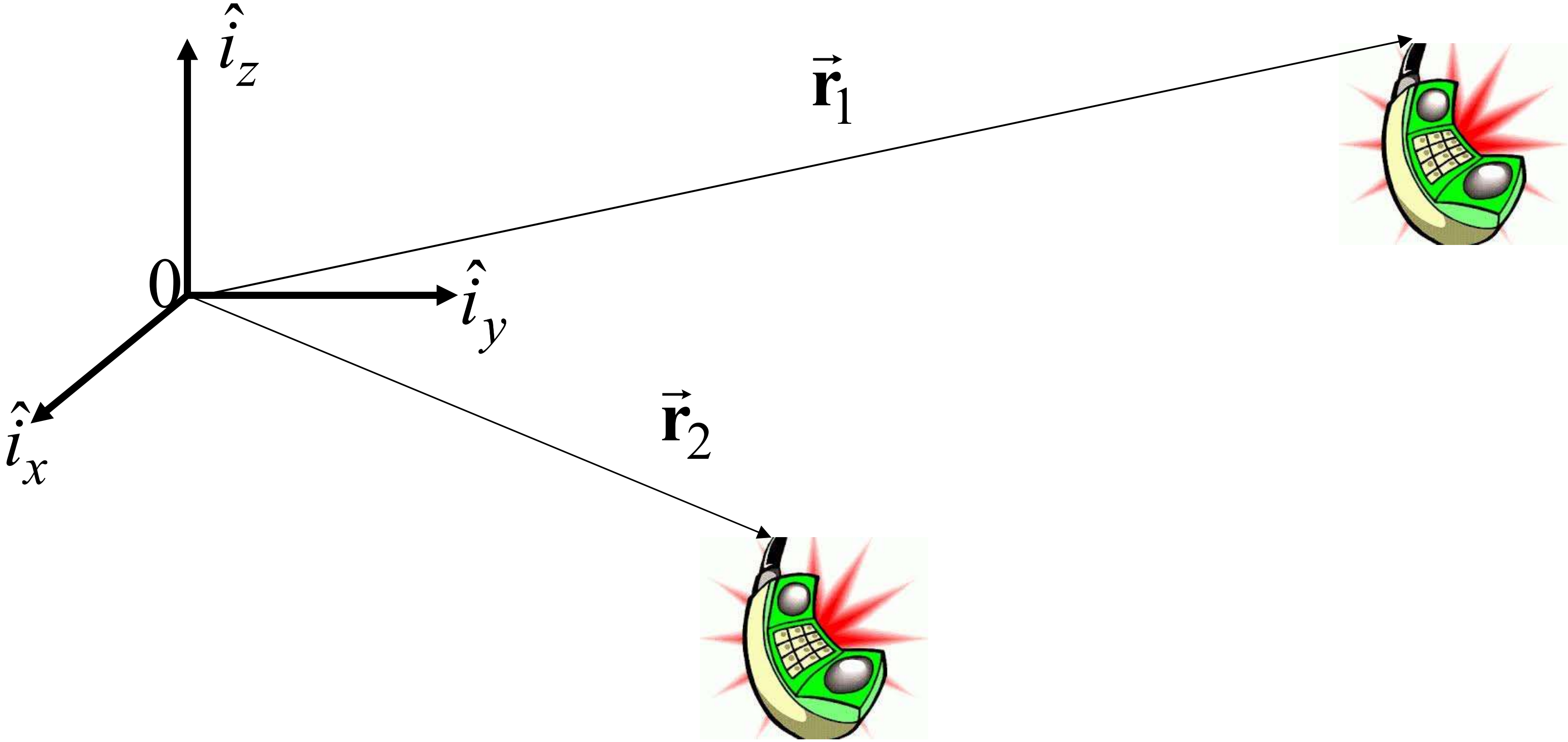
# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_z$$



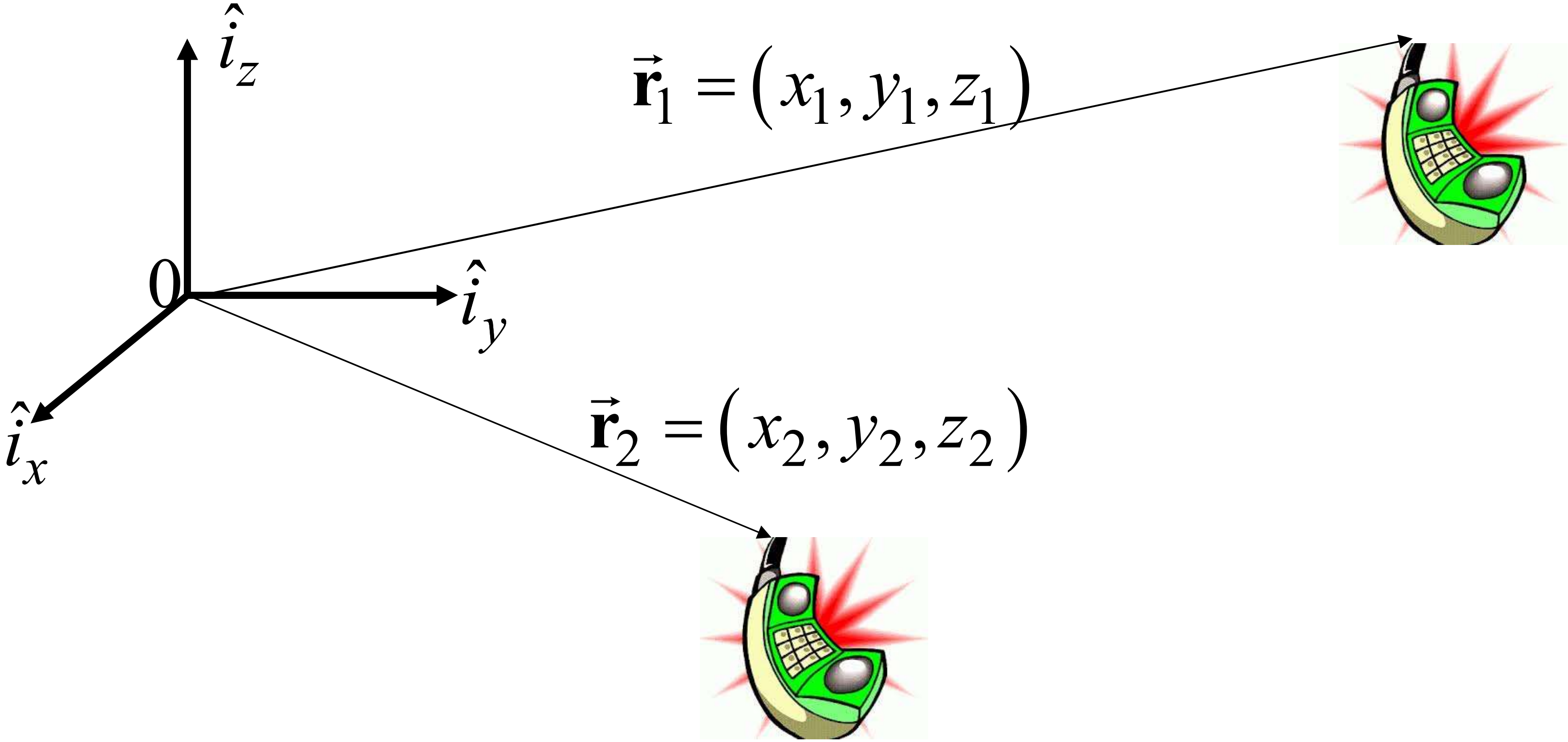

# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z$$



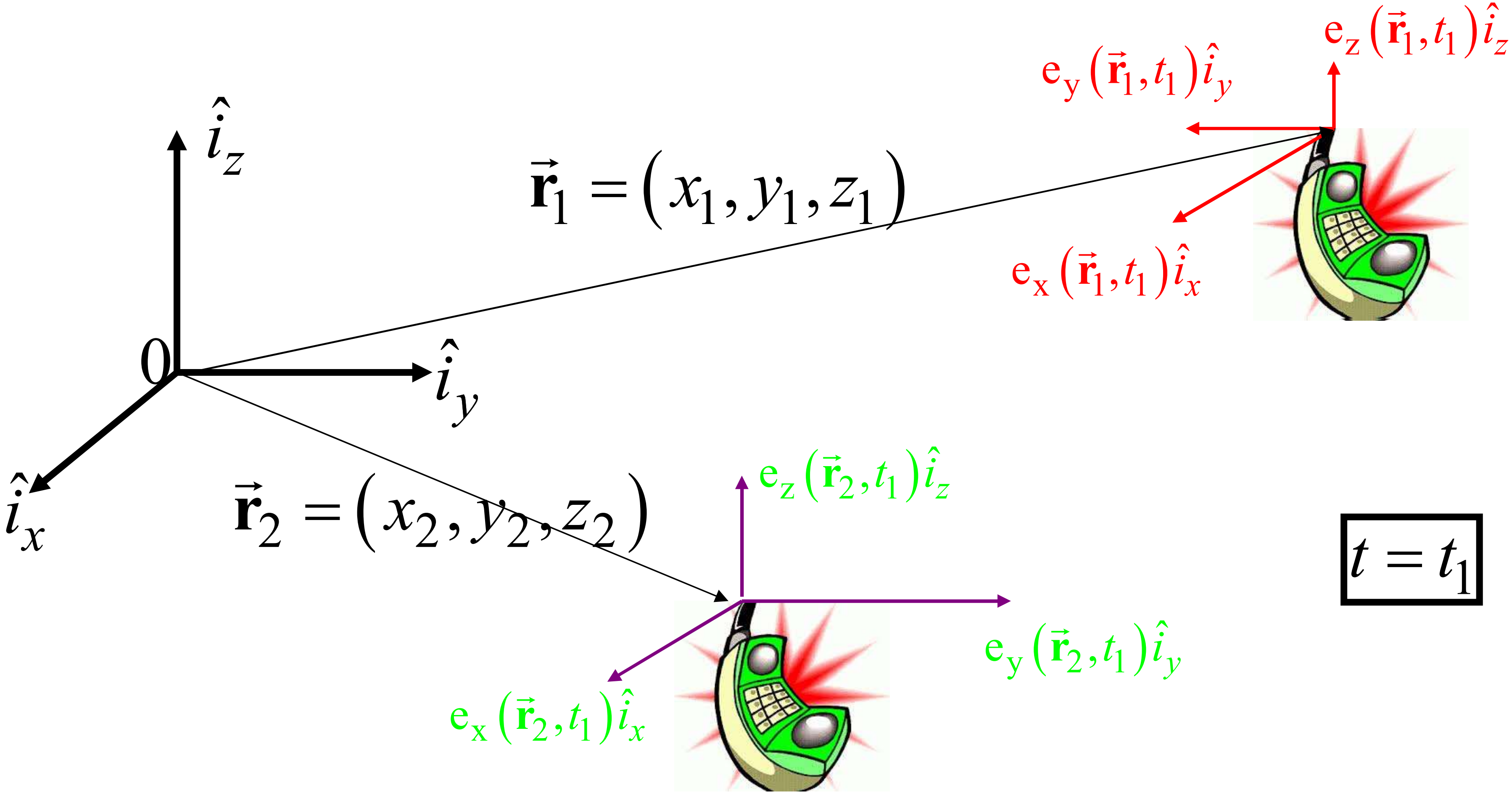
# Il <u>campo elettrico</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$



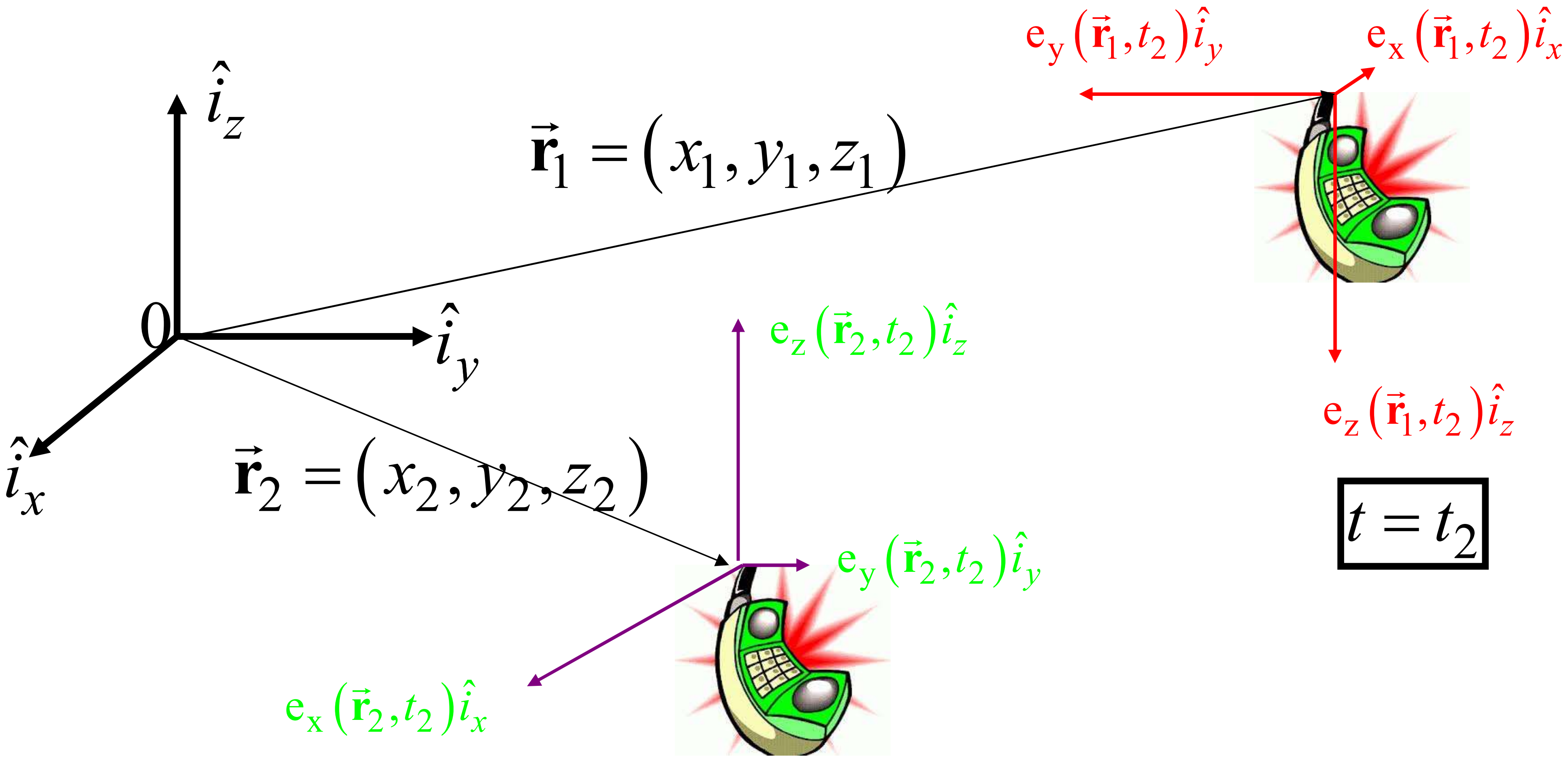
# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z$$



# Il **campo elettrico** dipende dallo **spazio** e dal **tempo**

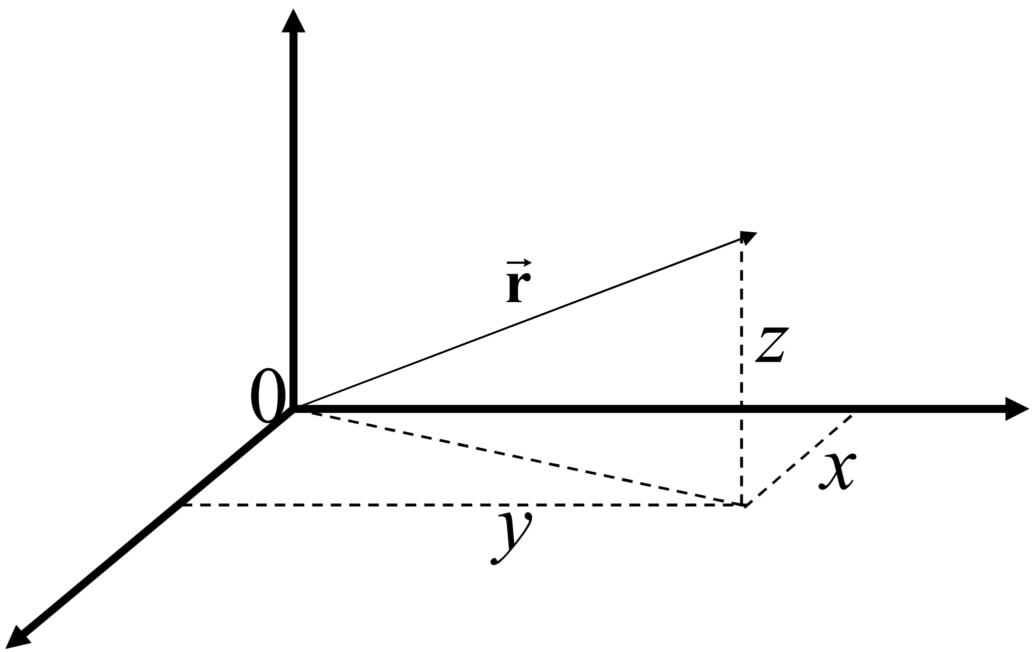
$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$



# Il <u>campo elettrico</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \left(x, y, z\right)$$

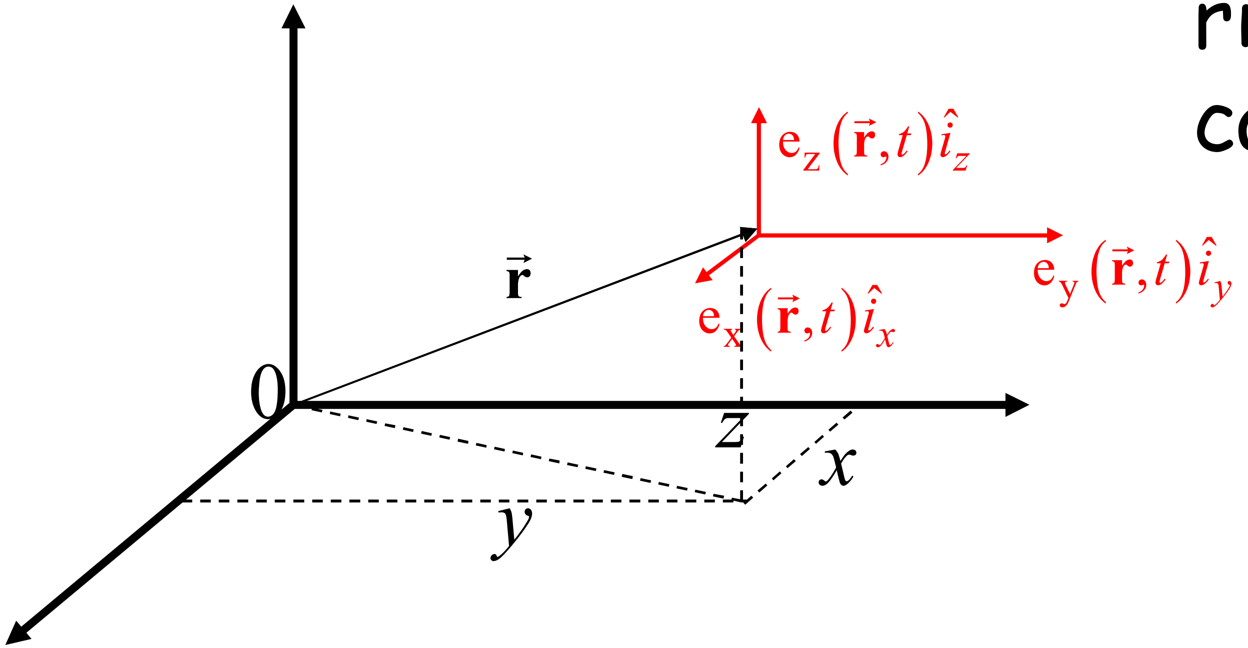



Sistema di riferimento cartesiano

# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (x,y,z)$$



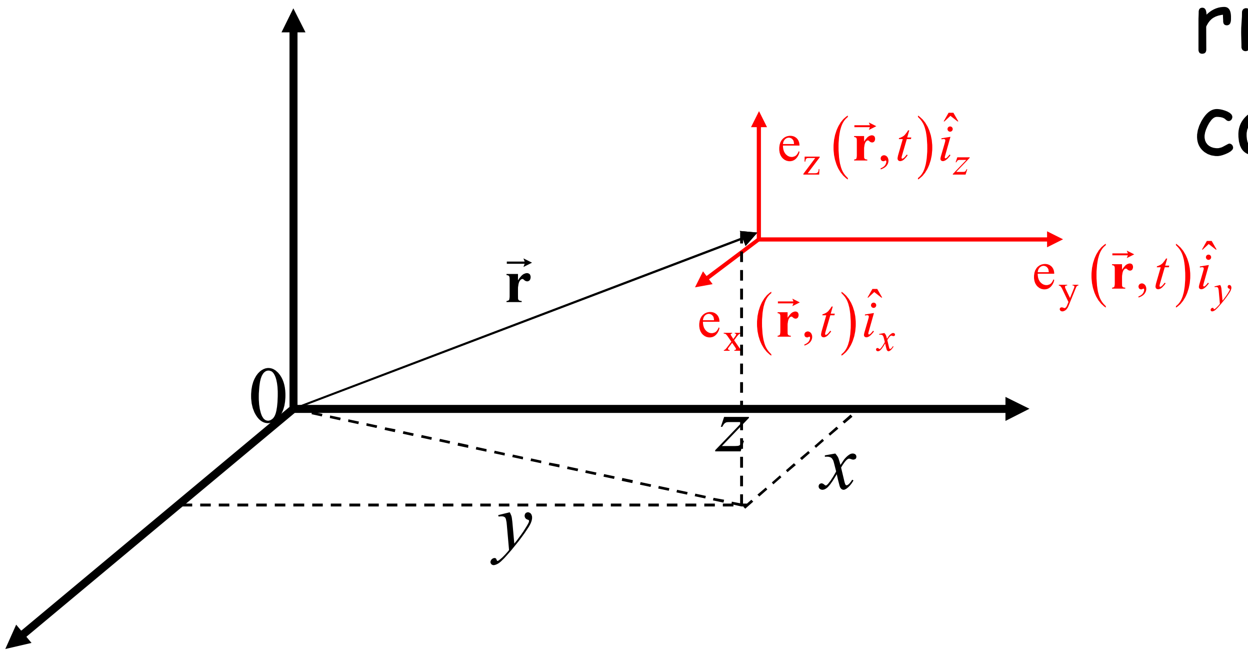

Sistema di riferimento cartesiano

# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(x, y, z, t)$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$$

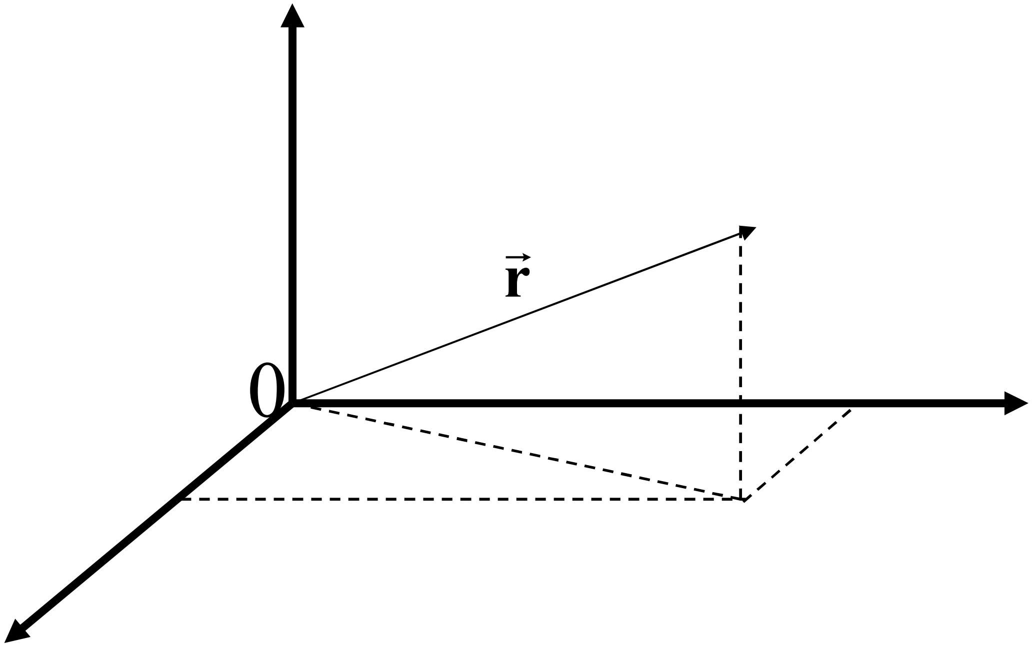



Sistema di riferimento cartesiano

# Il campo elettrico dipende dallo spazio e dal tempo

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$$



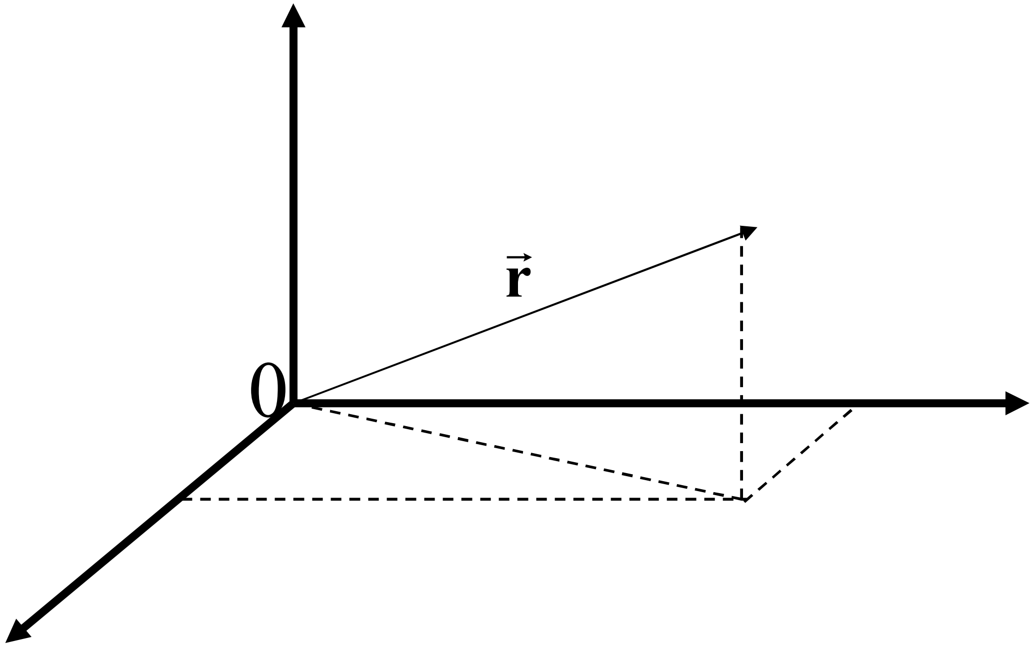

Sistema di riferimento sferico

# Il **campo elettrico** dipende dallo **spazio** e dal **tempo**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \cancel{\vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)\hat{i}_z}$$

$$\cancel{\vec{\mathbf{r}} = \left(x, y, z\right)}$$

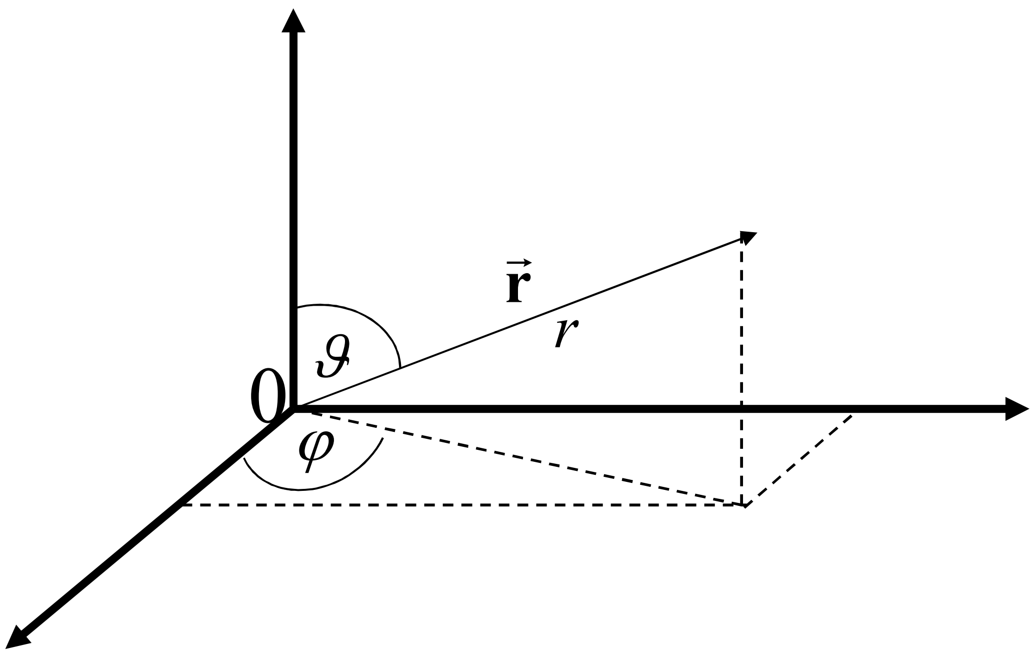
Sistema di riferimento sferico



# Il <u>campo elettrico</u> dipende dallo **<u>spazio</u>** e dal **<u>tempo</u>**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) \qquad \cancel{\vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (r,\vartheta,\varphi)$$

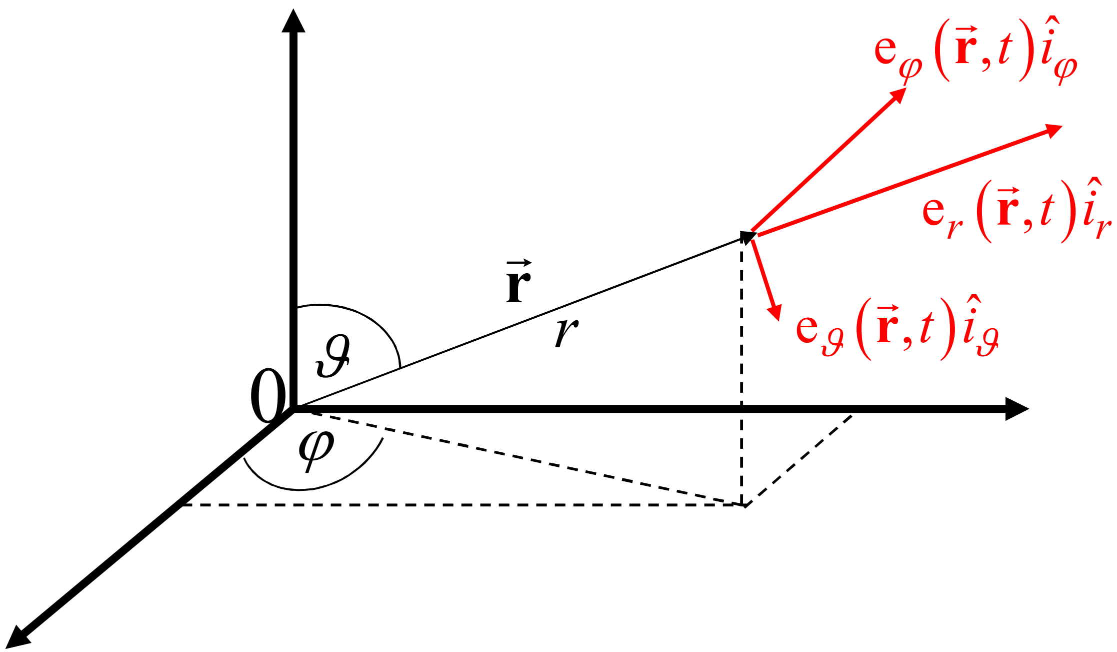



Sistema di riferimento sferico

# Il <u>**campo elettrico**</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e}_r(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_r + \mathrm{e}_\vartheta(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{e}_\varphi(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_\varphi$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (r, \vartheta, \varphi)$$



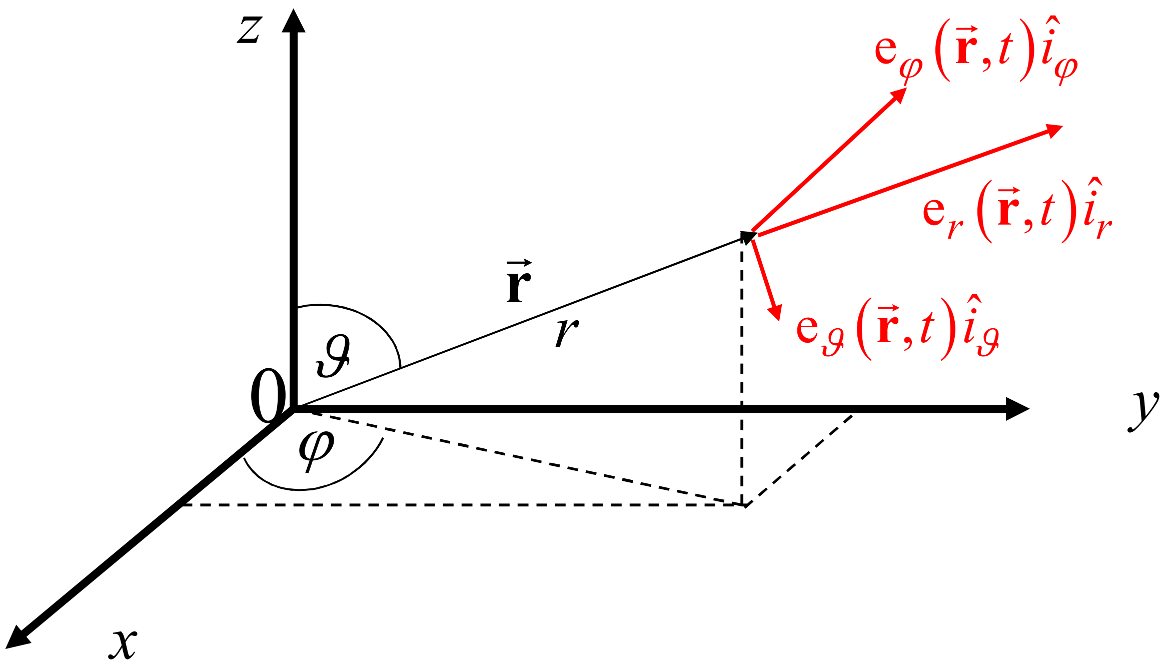

Sistema di riferimento sferico

# Il **campo elettrico** dipende dallo **spazio** e dal **tempo**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \qquad \vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e}_r(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_r + \mathrm{e}_\vartheta(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{e}_\varphi(\vec{\mathbf{r}}, t)\hat{i}_\varphi$$

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(r, \vartheta, \varphi, t)$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (r, \vartheta, \varphi)$$

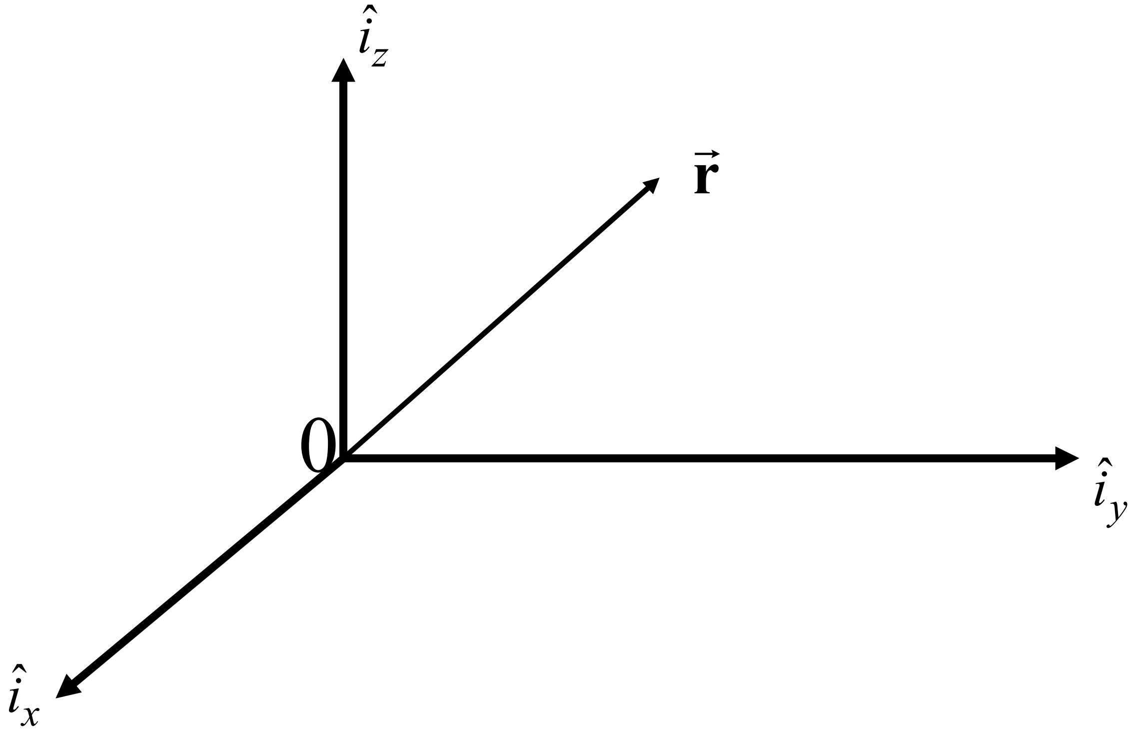



Sistema di riferimento sferico

# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 1

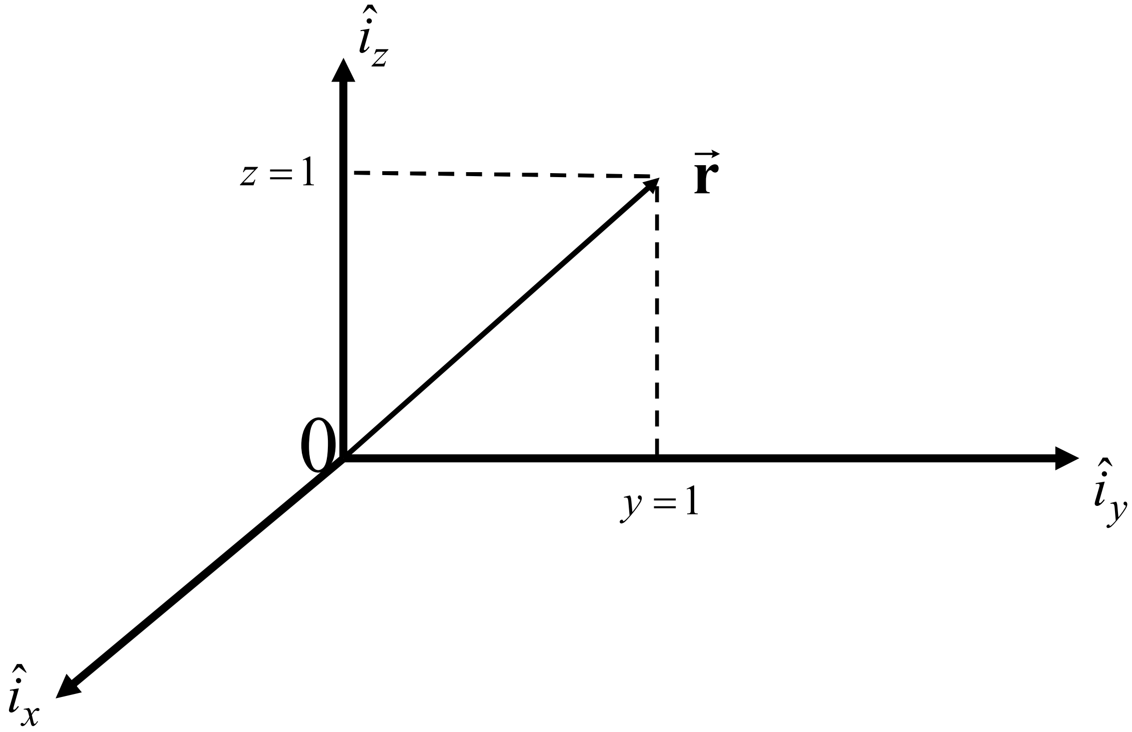
$$\vec{\mathbf{r}} = \left( x = 0, y = 1, z = 1 \right)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 1

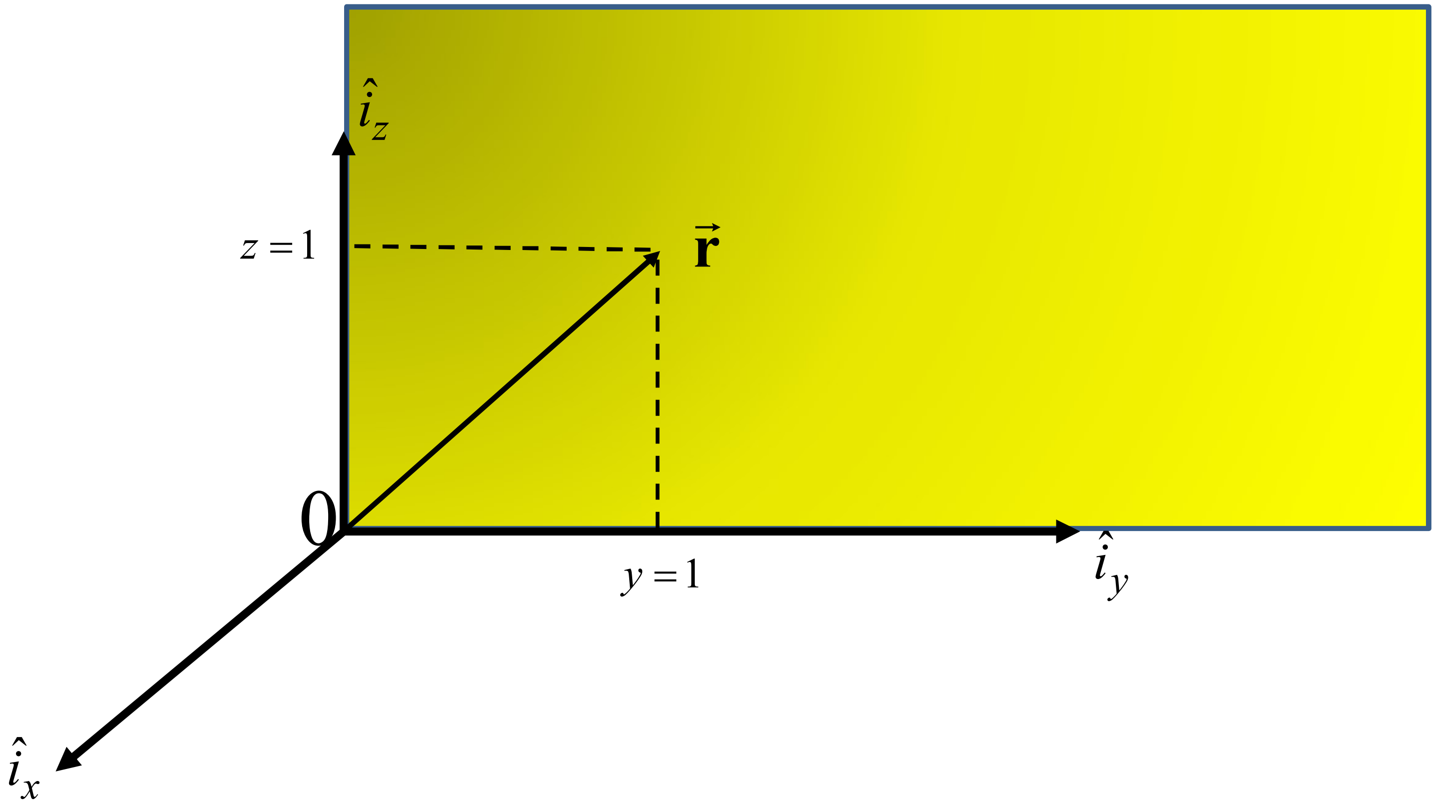
$$\vec{\mathbf{r}} = (x = 0, y = 1, z = 1)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 1

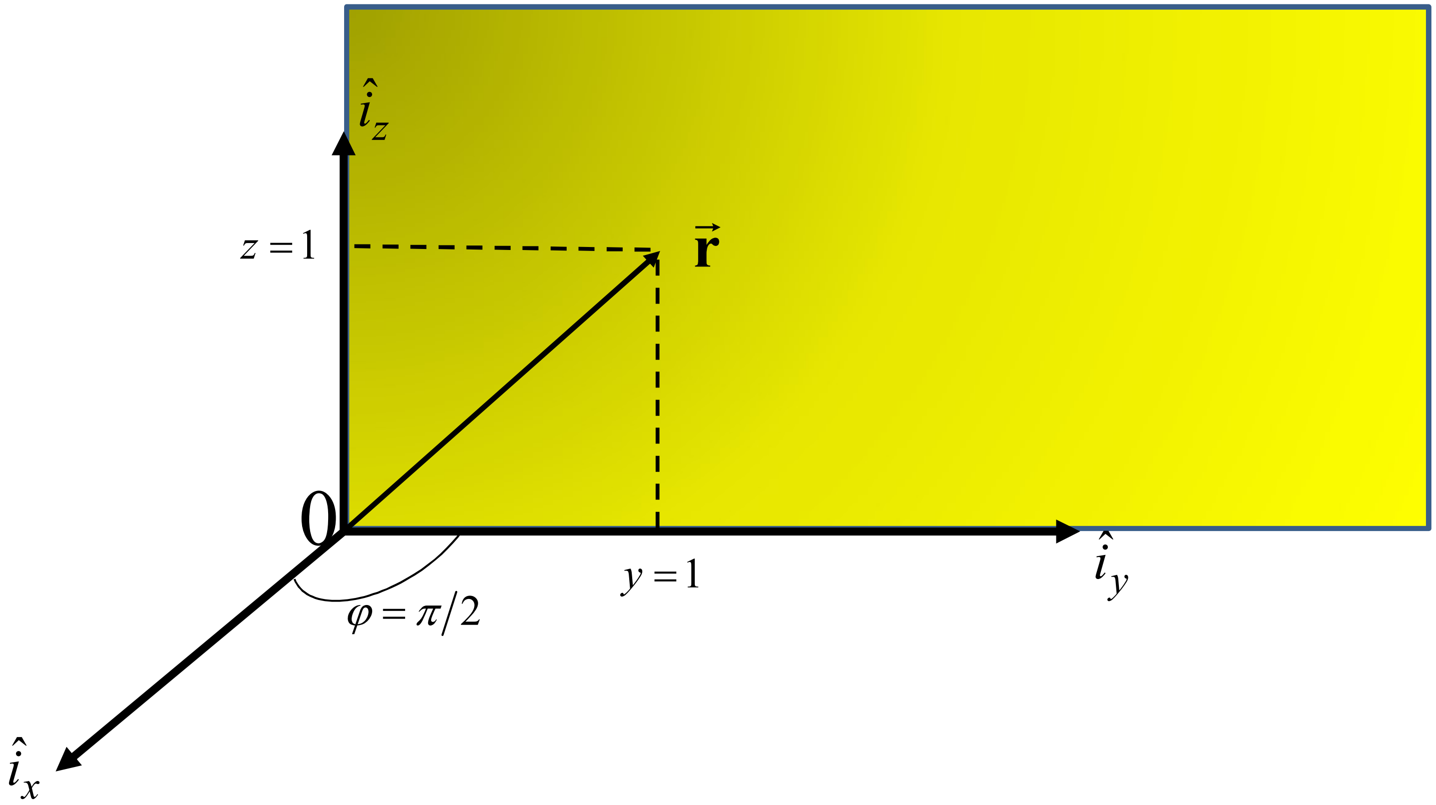
$$\vec{\mathbf{r}} = (x = 0, y = 1, z = 1)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 1

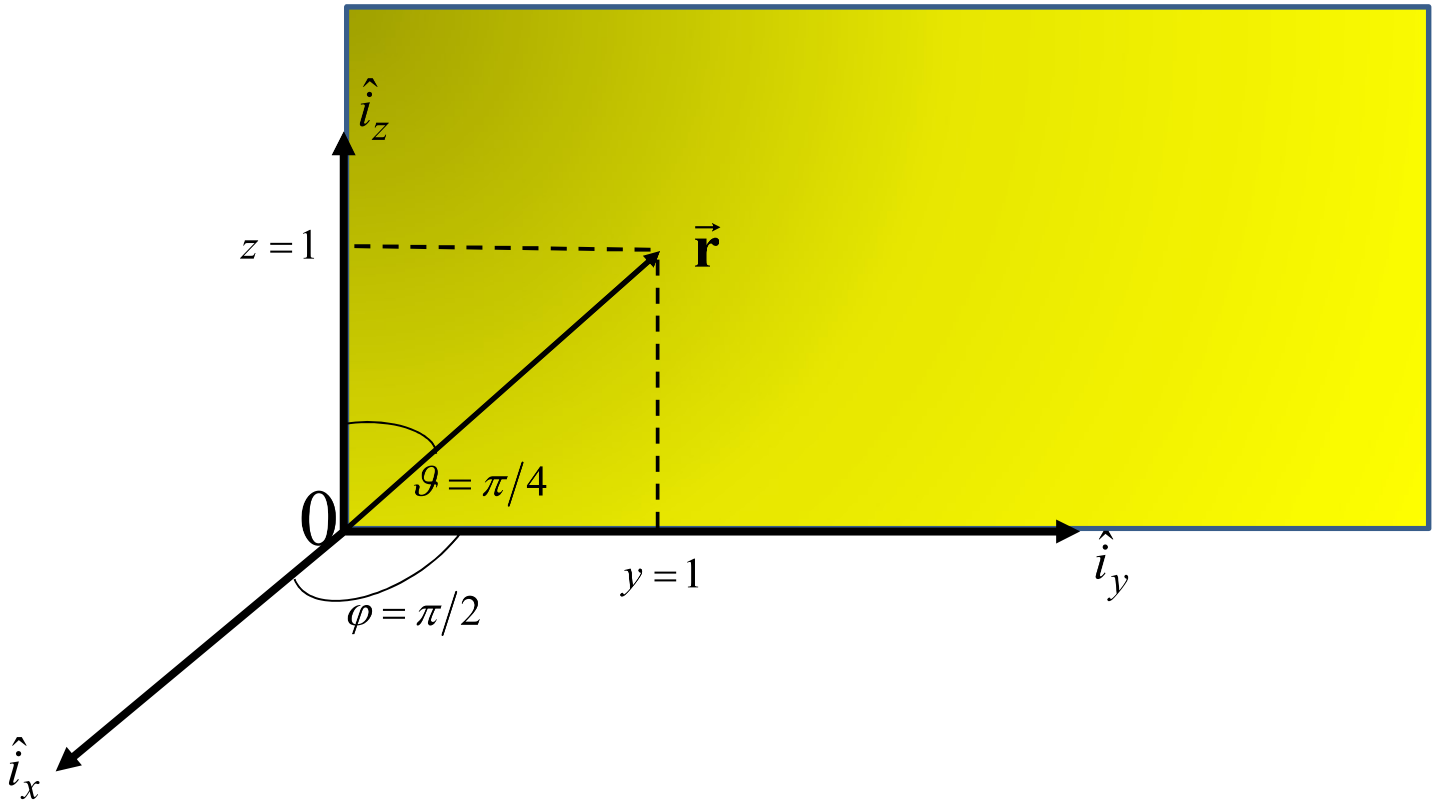
$$\vec{\mathbf{r}} = (x = 0, y = 1, z = 1)$$



# Sistema di riferimento sferico

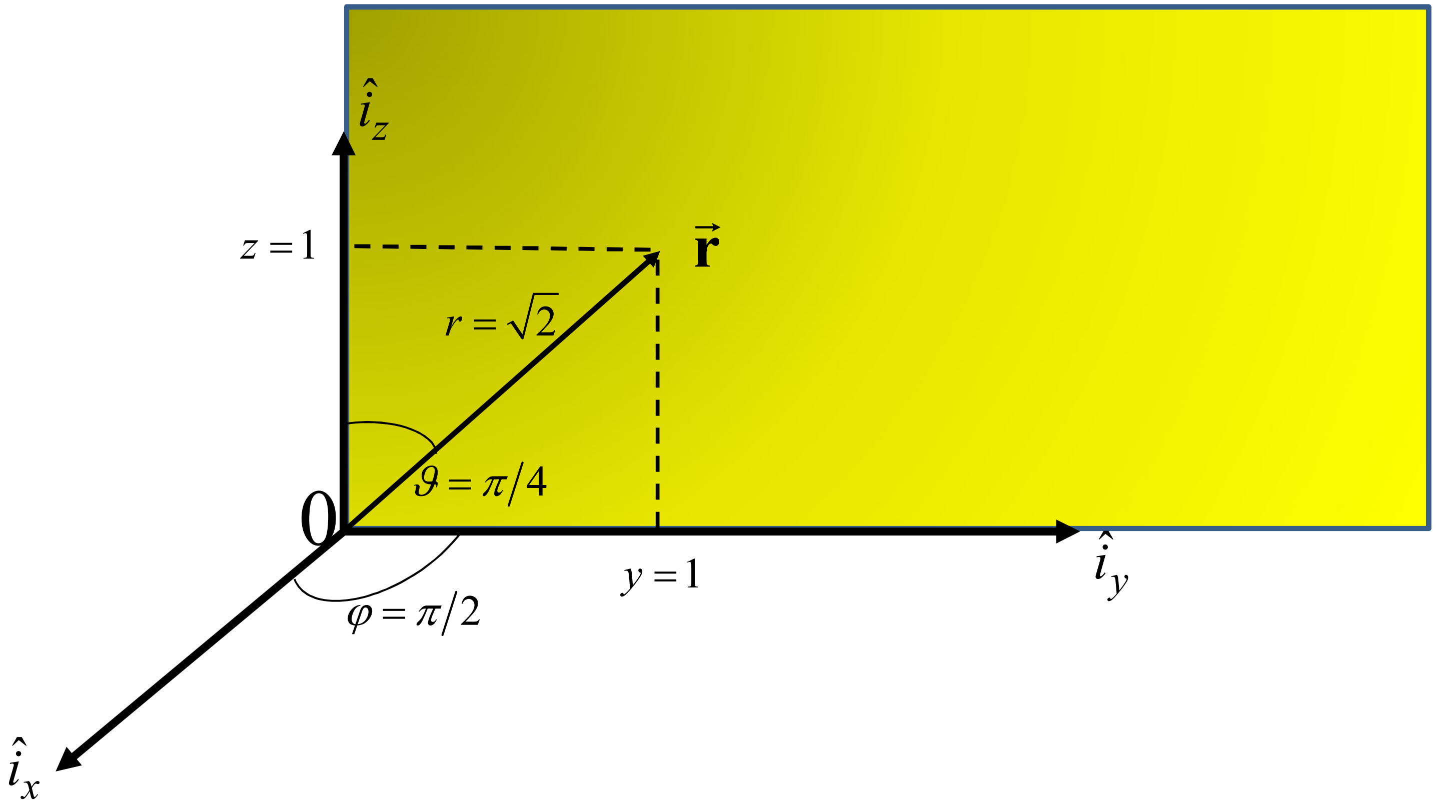
Esercizio 1

$$\vec{\mathbf{r}} = \left( x = 0, y = 1, z = 1 \right)$$



# Sistema di riferimento sferico

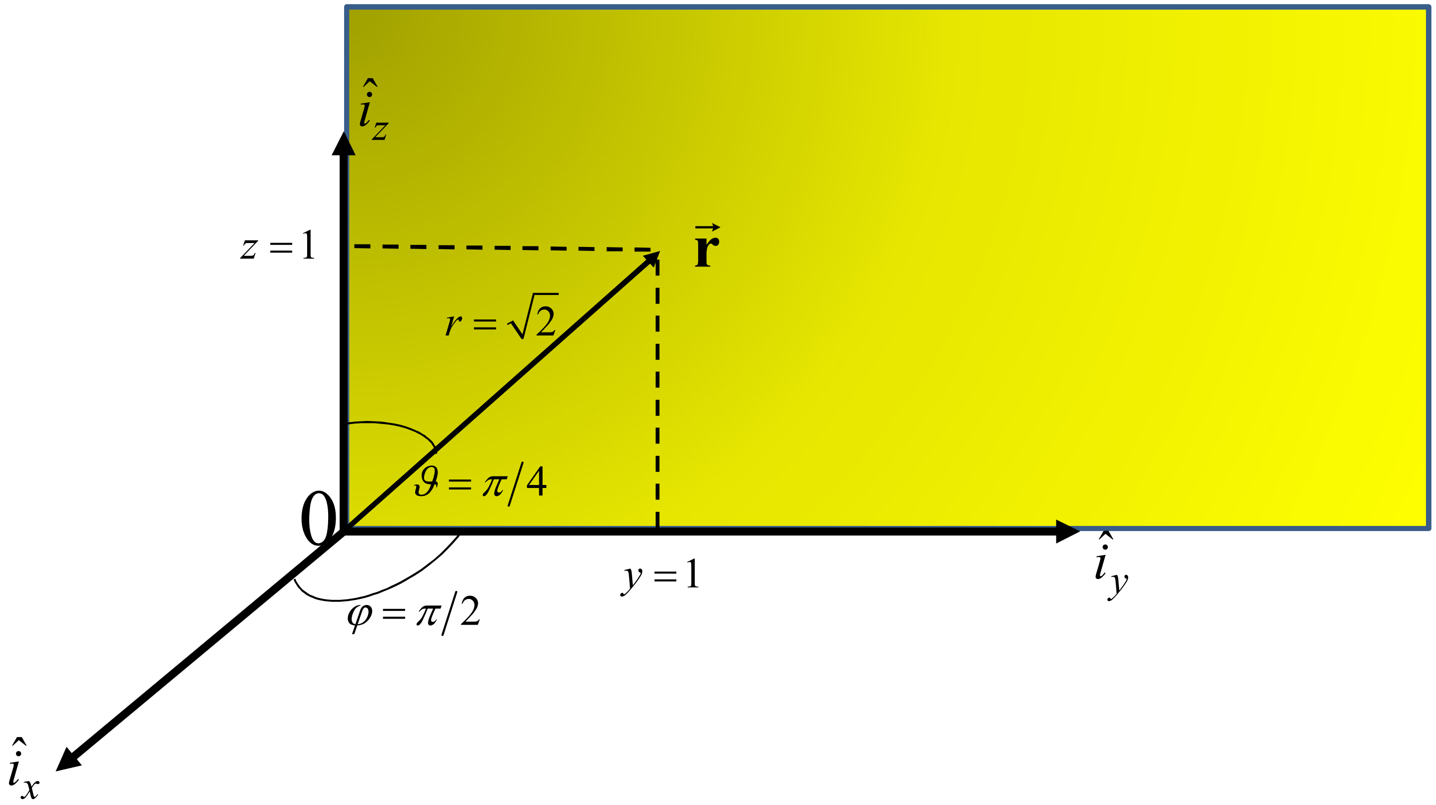
Esercizio 1 $\qquad \vec{\mathbf{r}} = \left(x = 0, y = 1, z = 1\right)$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 1

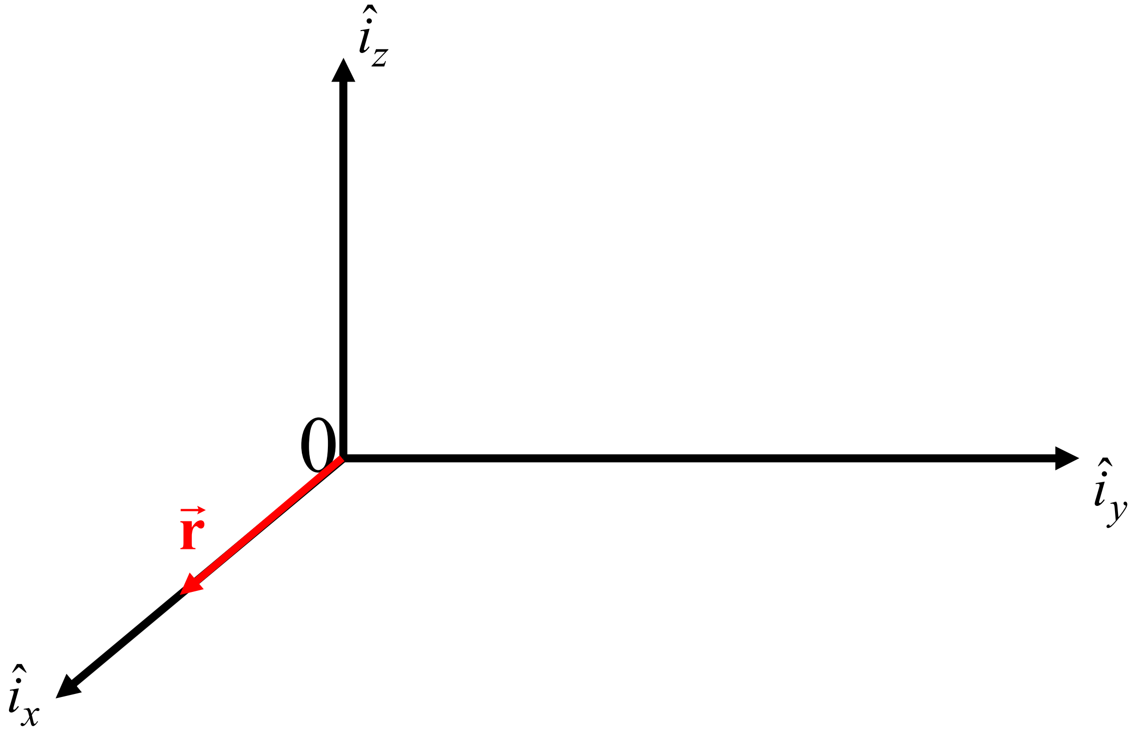
$$\vec{\mathbf{r}} = \left(x = 0, y = 1, z = 1\right)$$
$$\vec{\mathbf{r}} = \left(r = \sqrt{2}, \vartheta = \pi/4, \varphi = \pi/2\right)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 2

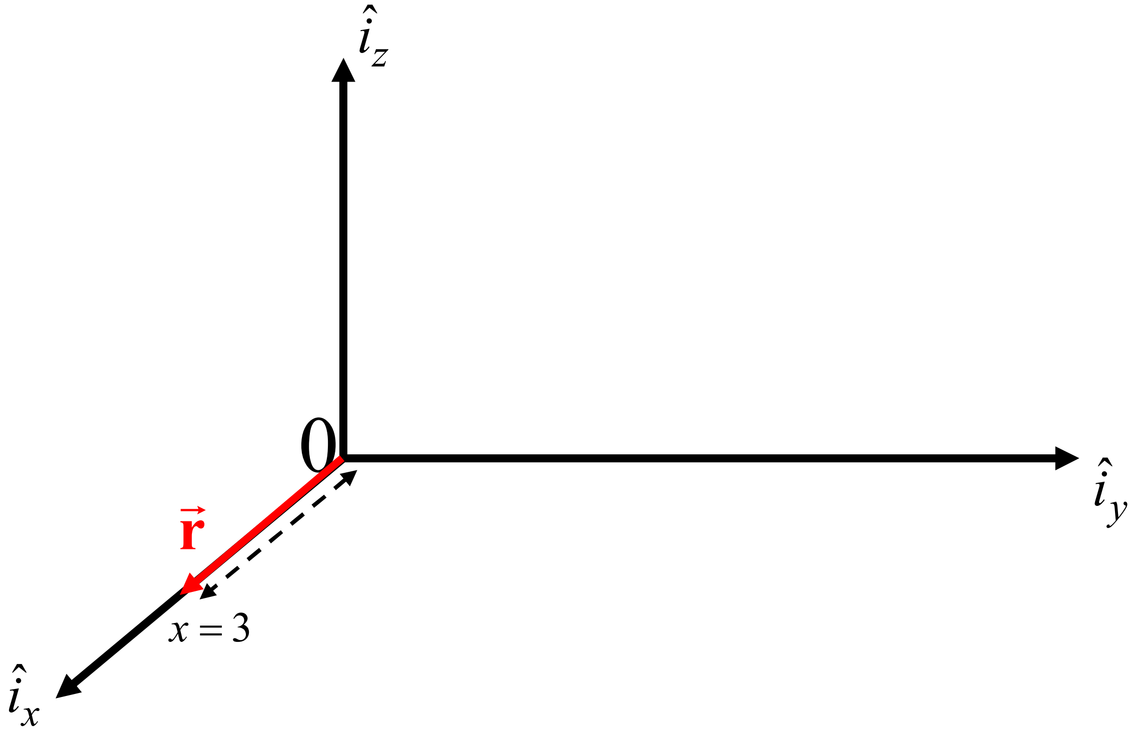
$$\vec{\mathbf{r}} = \left( x = 3, y = 0, z = 0 \right)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 2

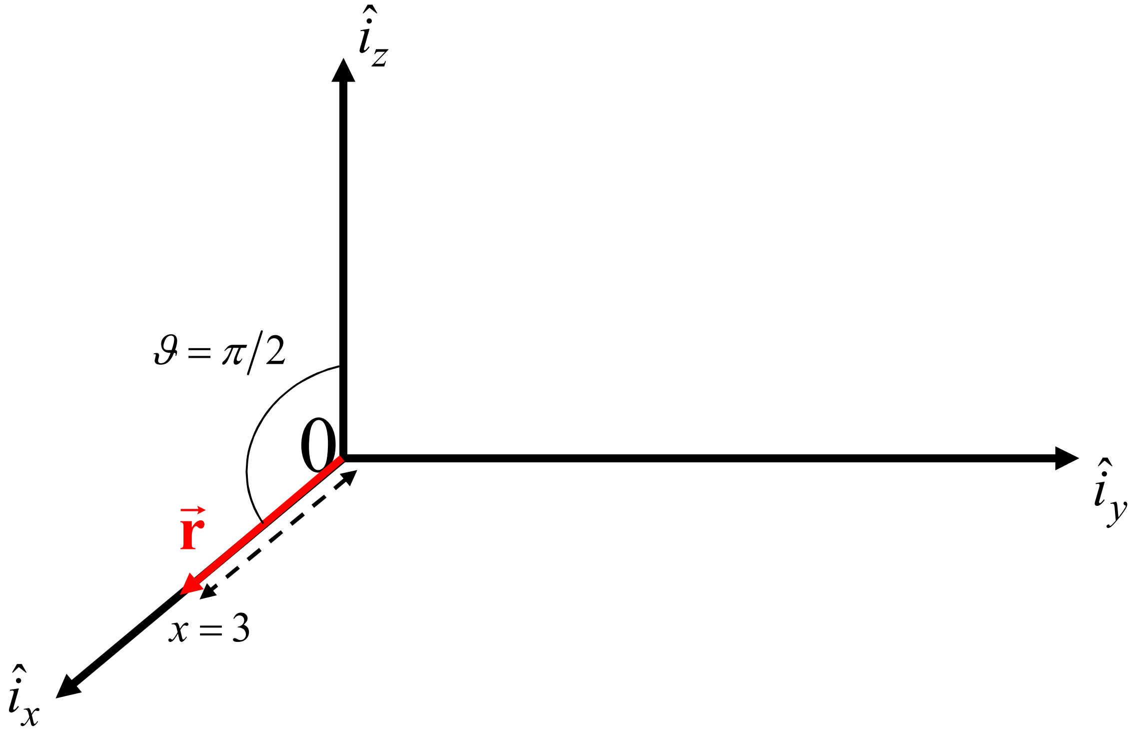
$$\vec{\mathbf{r}} = \left( x = 3, y = 0, z = 0 \right)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 2

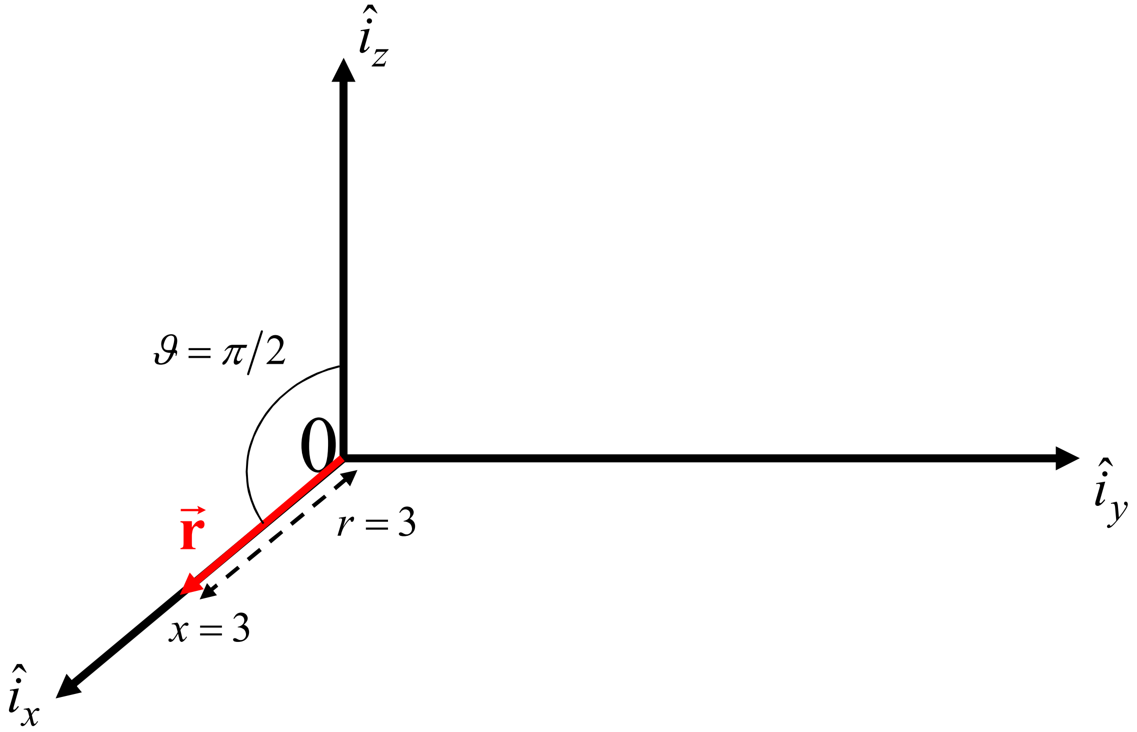
$$\vec{\mathbf{r}} = \left( x = 3, y = 0, z = 0 \right)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 2

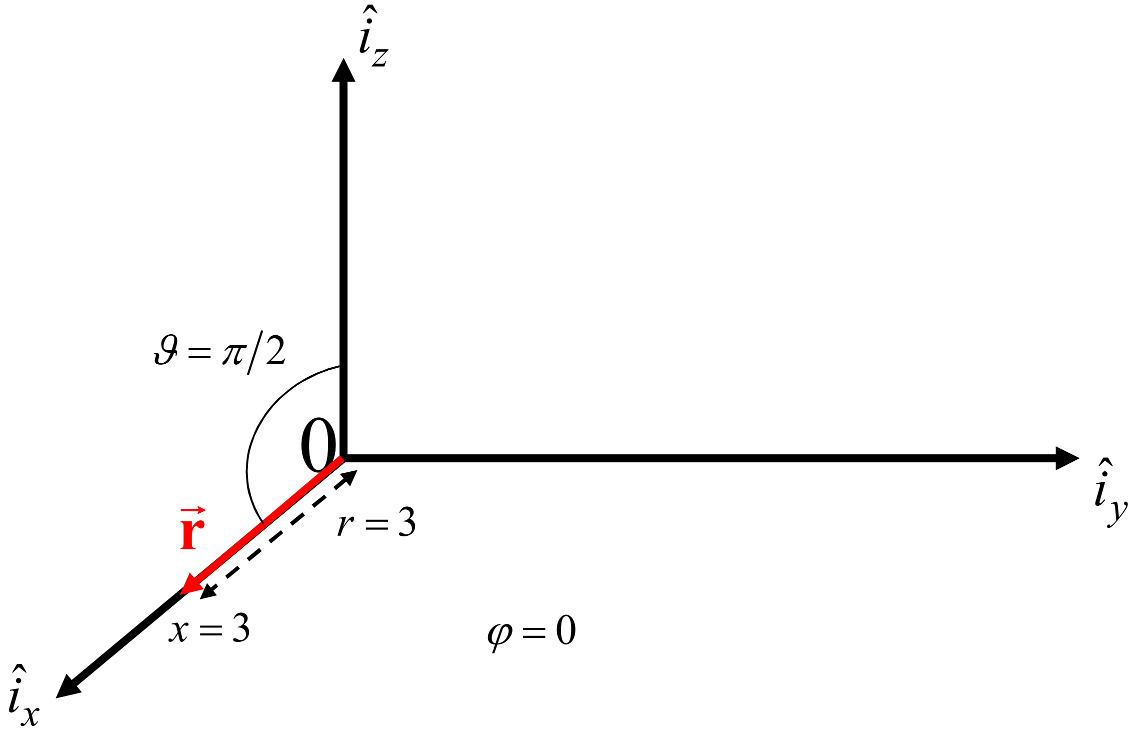
$$\vec{\mathbf{r}} = \left( x = 3, y = 0, z = 0 \right)$$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 2

$$\vec{\mathbf{r}} = (x = 3, y = 0, z = 0)$$

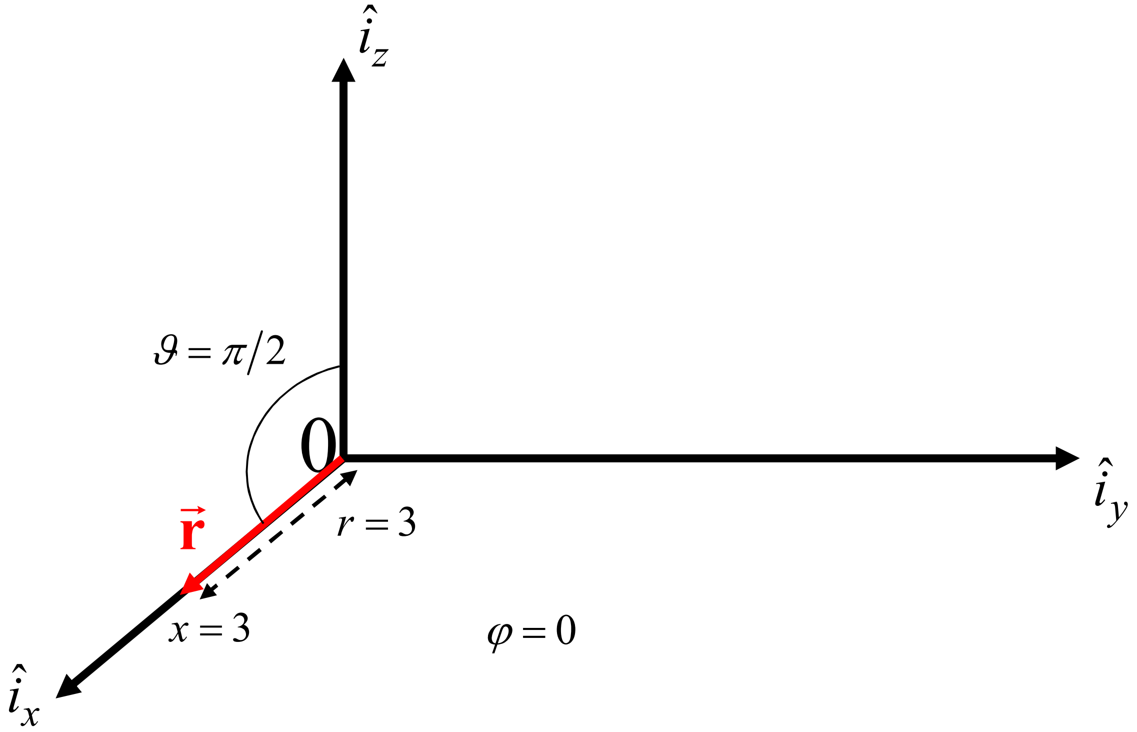


# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 2

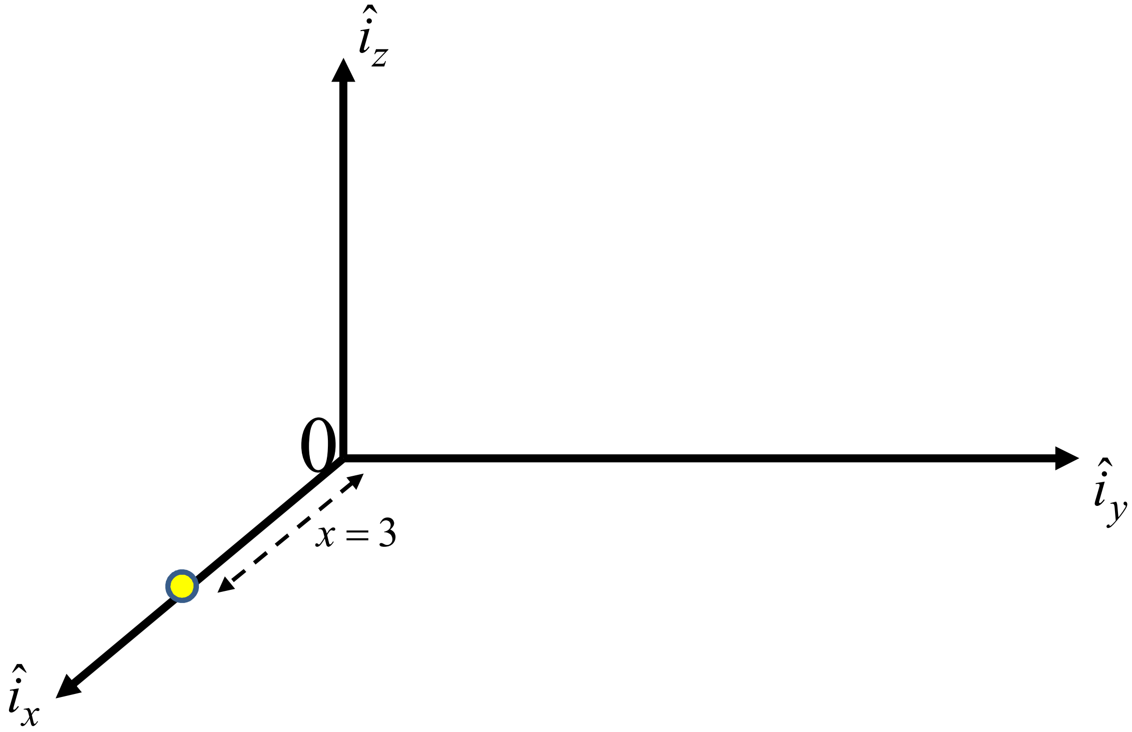
$$\vec{\mathbf{r}} = \left(x = 3, y = 0, z = 0\right)$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \left(r = 3, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0\right)$$



# Sistema di riferimento sferico

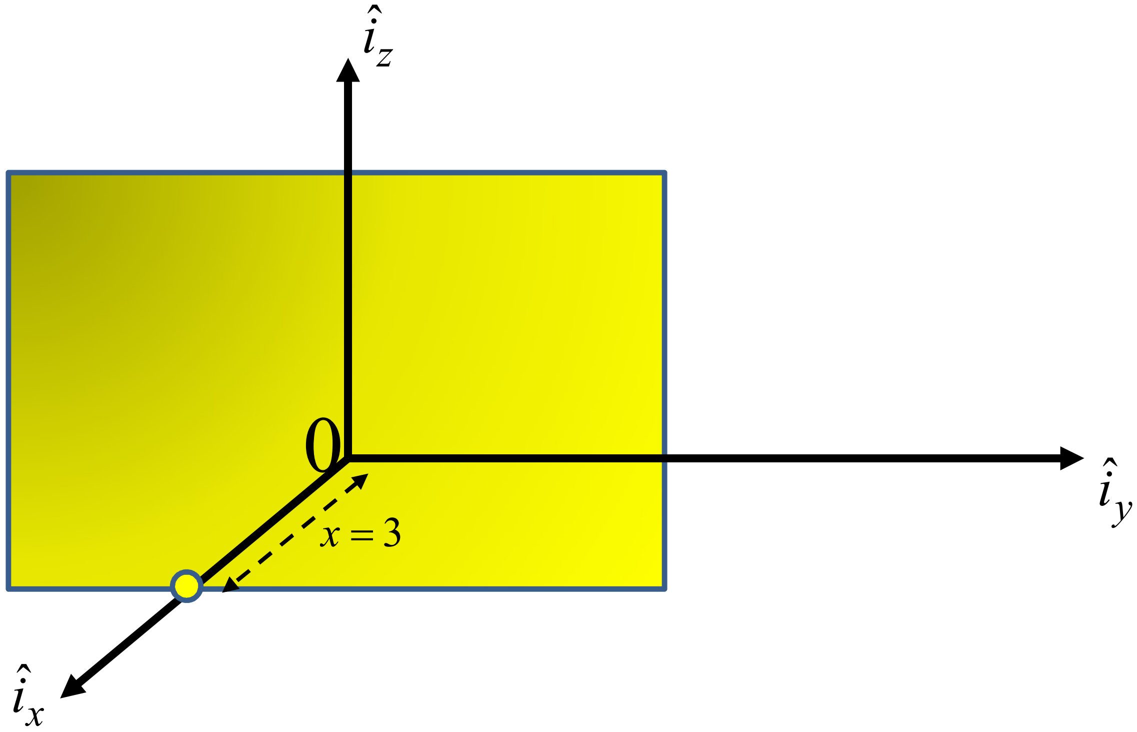
Esercizio 3 $x = 3$



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 3 $x = 3$

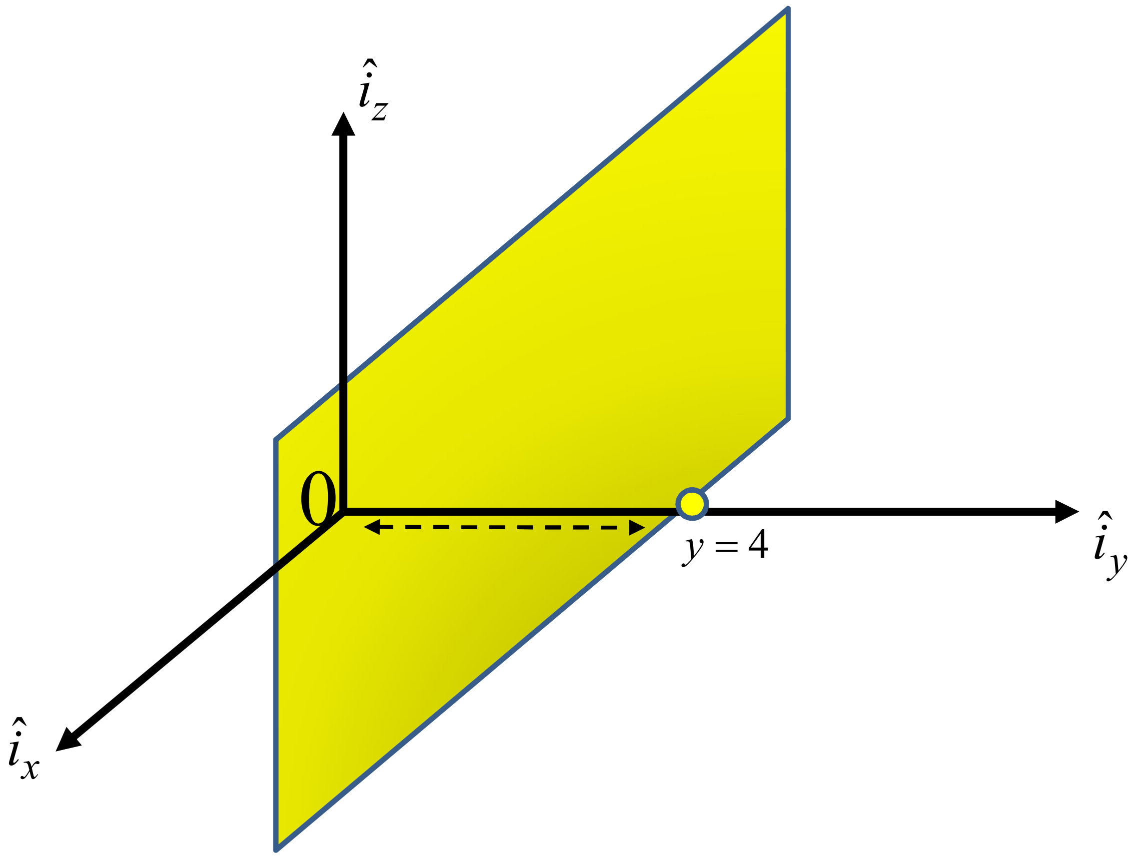
… definisce un piano



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 3 $y = 4$

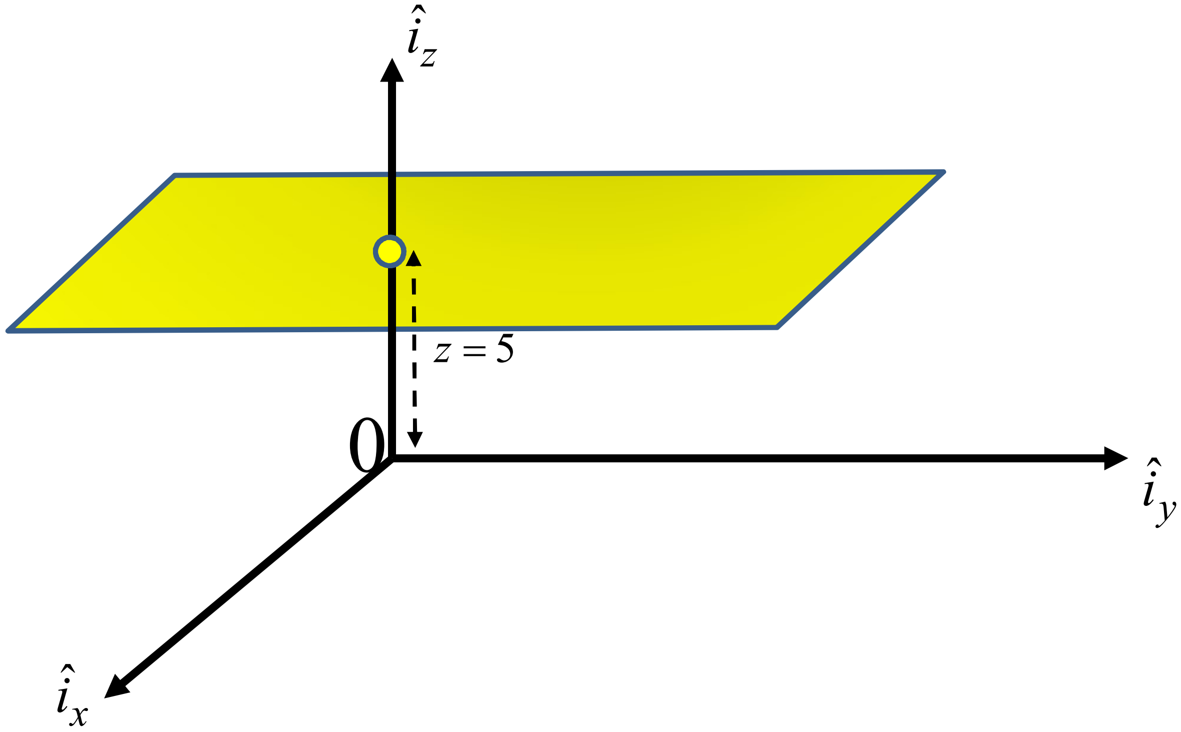
… definisce un piano



# Sistema di riferimento sferico

Esercizio 4 $z = 5$

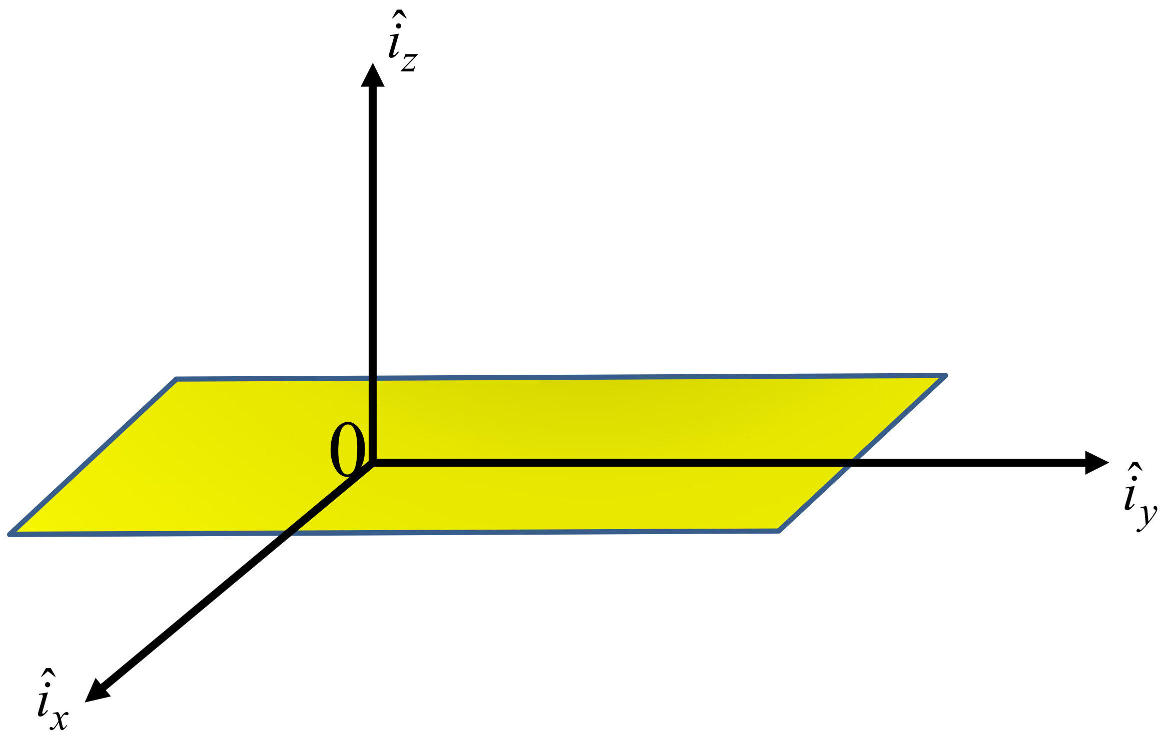
… definisce un piano



# Sistema di riferimento sferico

## Esercizio 5

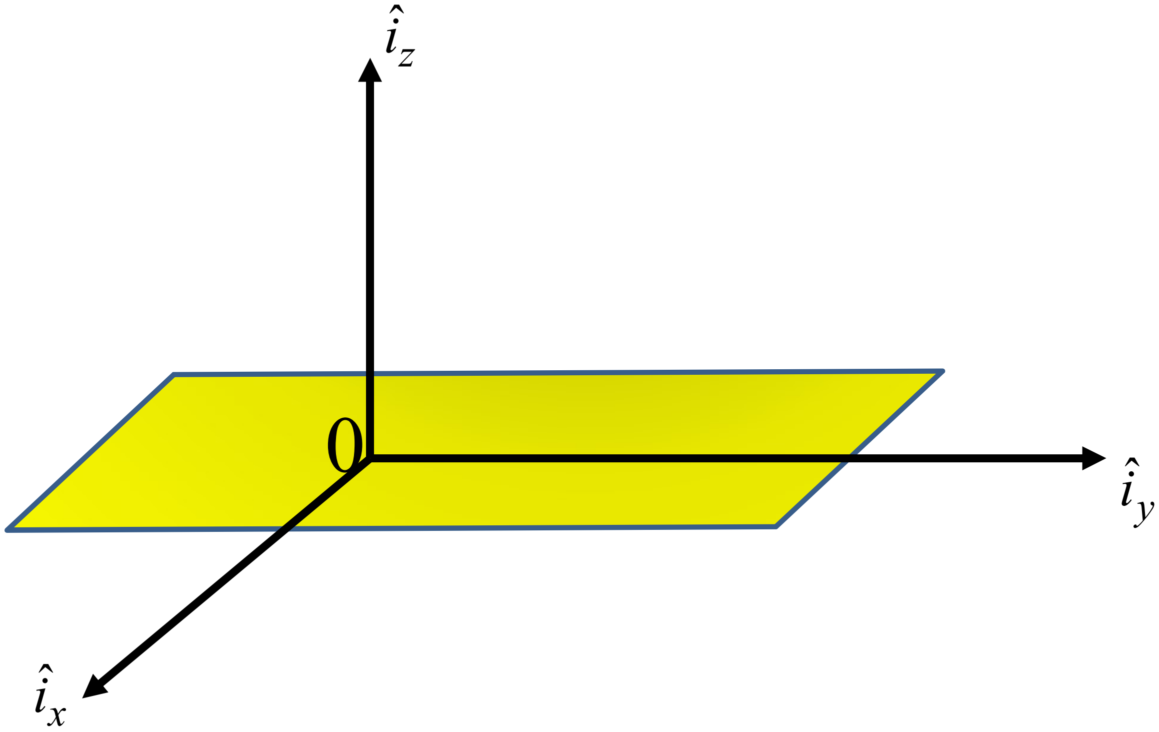
Piano xy ?



# Sistema di riferimento sferico

## Esercizio 5

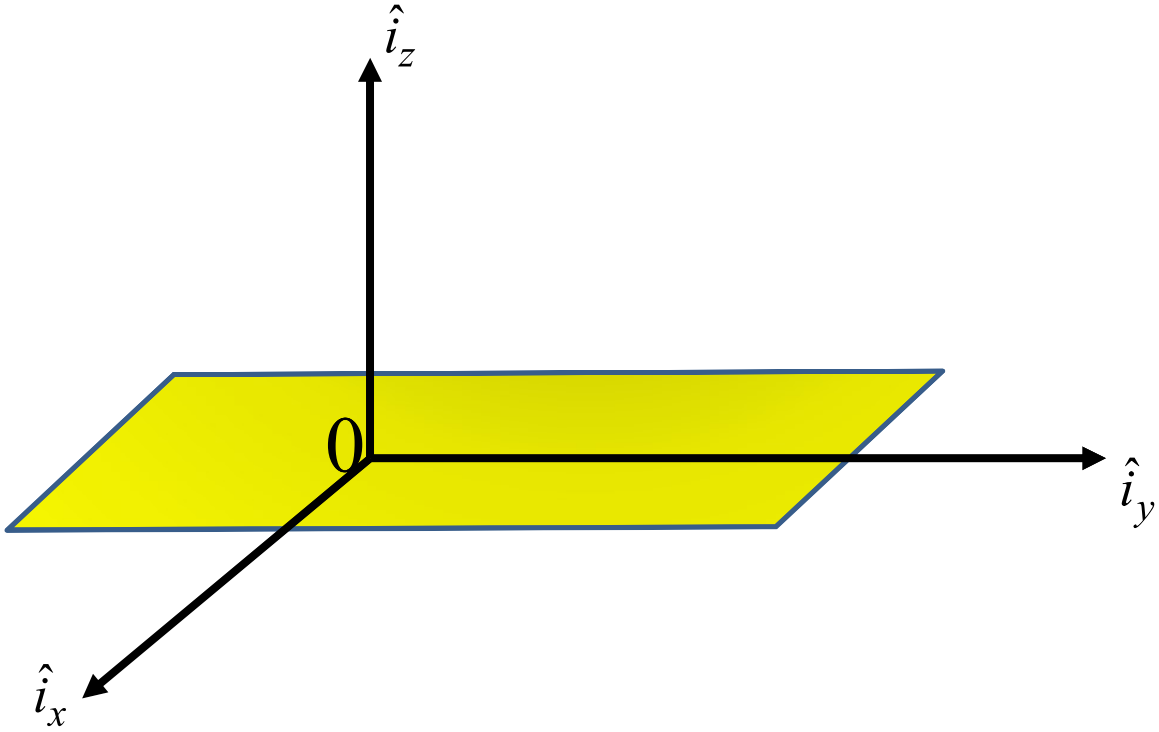
Piano xy ? $z = 0$



# Sistema di riferimento sferico

## Esercizio 5

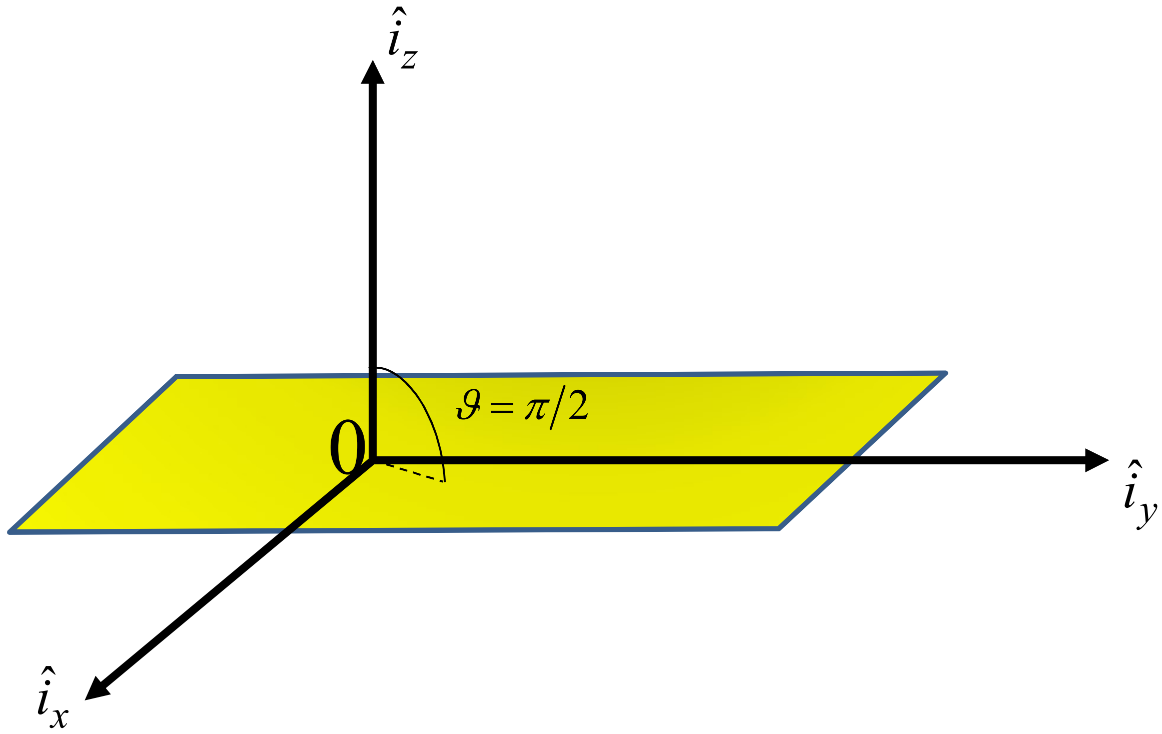
Piano xy ? $z = 0$ in coordinate cartesiane



# Sistema di riferimento sferico

## Esercizio 5

Piano xy ? $z = 0$ in coordinate cartesiane

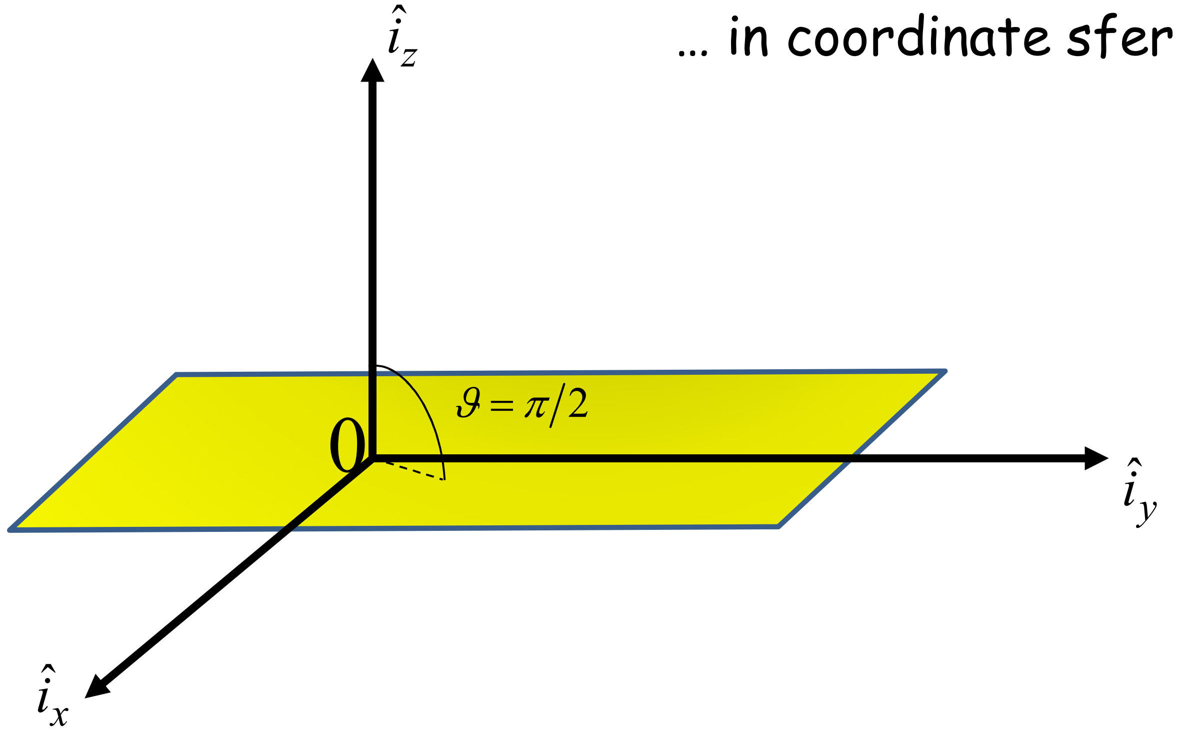


# Sistema di riferimento sferico

## Esercizio 5

Piano xy ? $z = 0$ in coordinate cartesiane

… in coordinate sferiche $\vartheta = \pi/2$

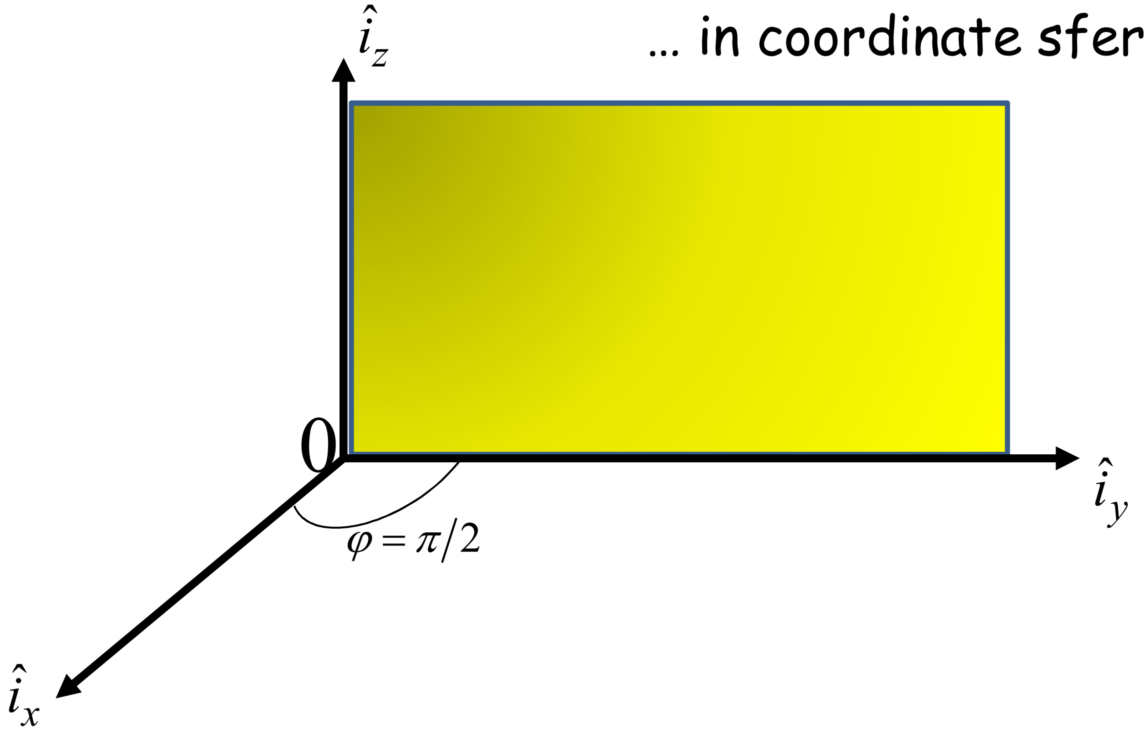


# Sistema di riferimento sferico

## Esercizio 6

Piano zy ? $x = 0$ in coordinate cartesiane

… in coordinate sferiche $\varphi = \pi/2$

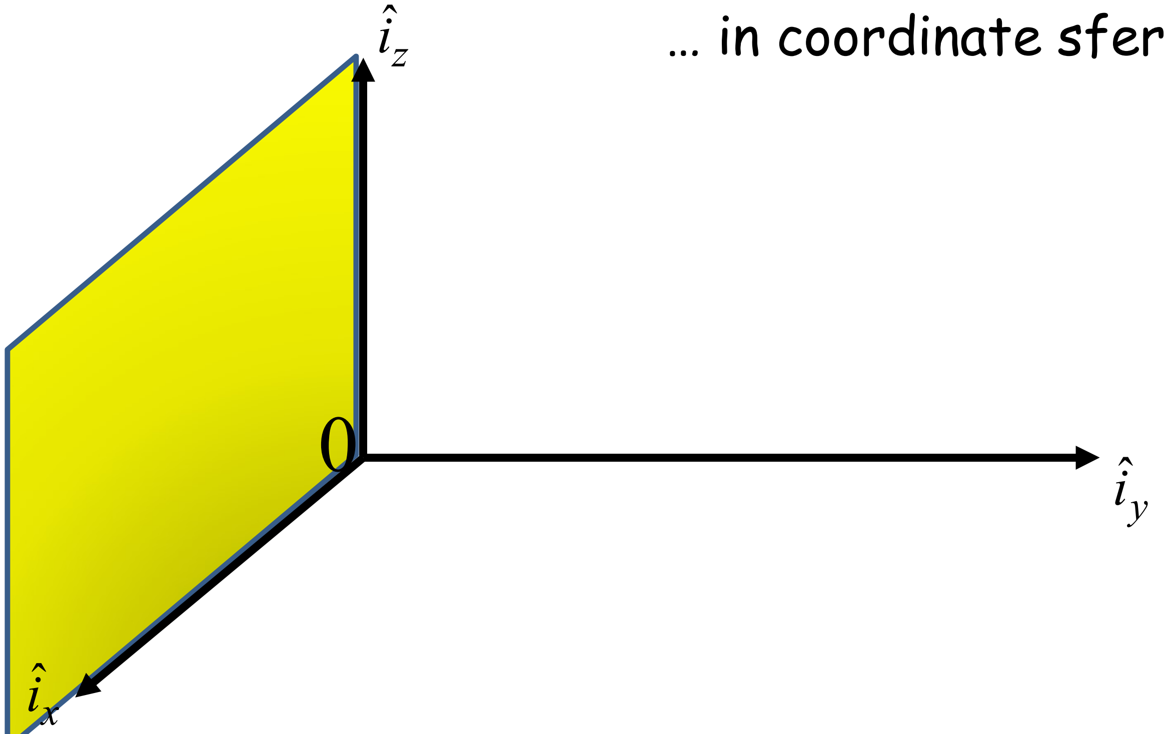


# Sistema di riferimento sferico

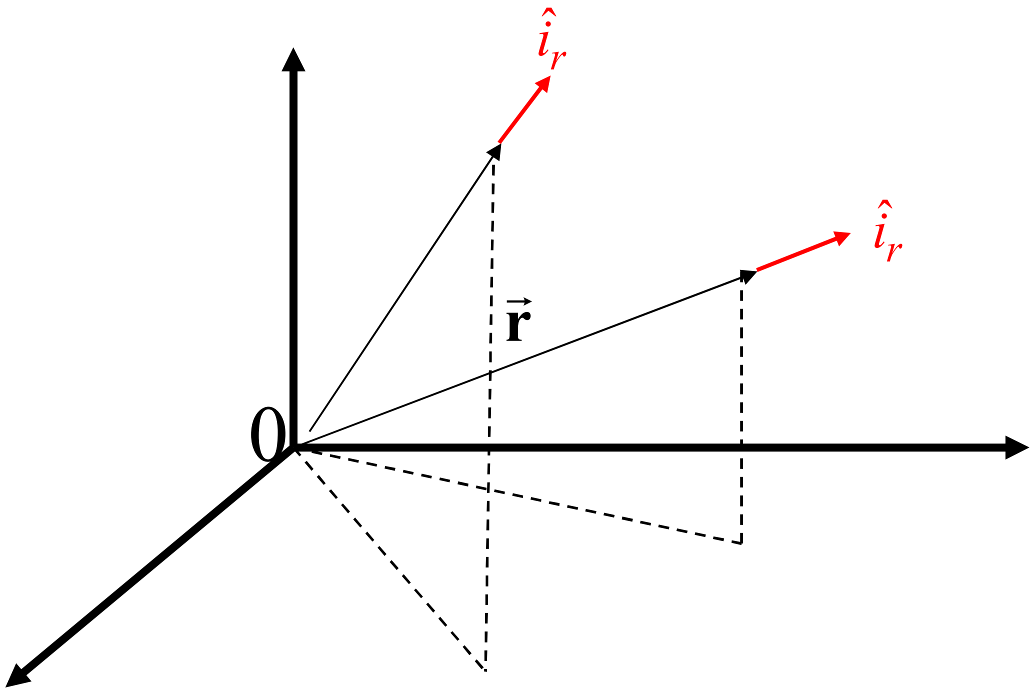
## Esercizio 7

Piano xz ? $y = 0$ in coordinate cartesiane

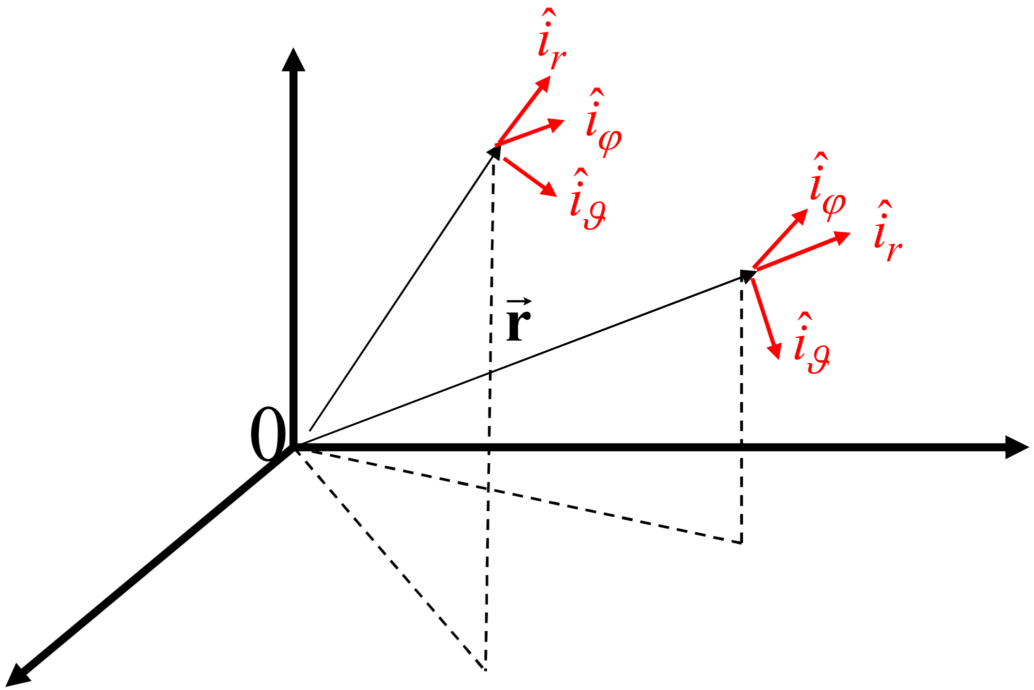
… in coordinate sferiche $\varphi = 0$



# Sistema di riferimento sferico

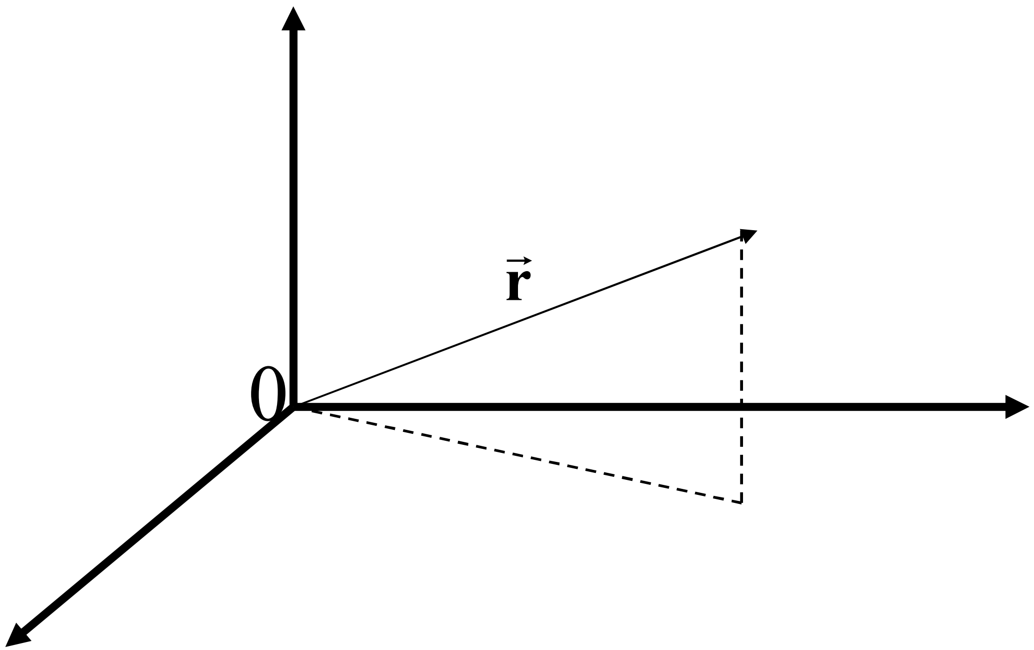


# Sistema di riferimento sferico



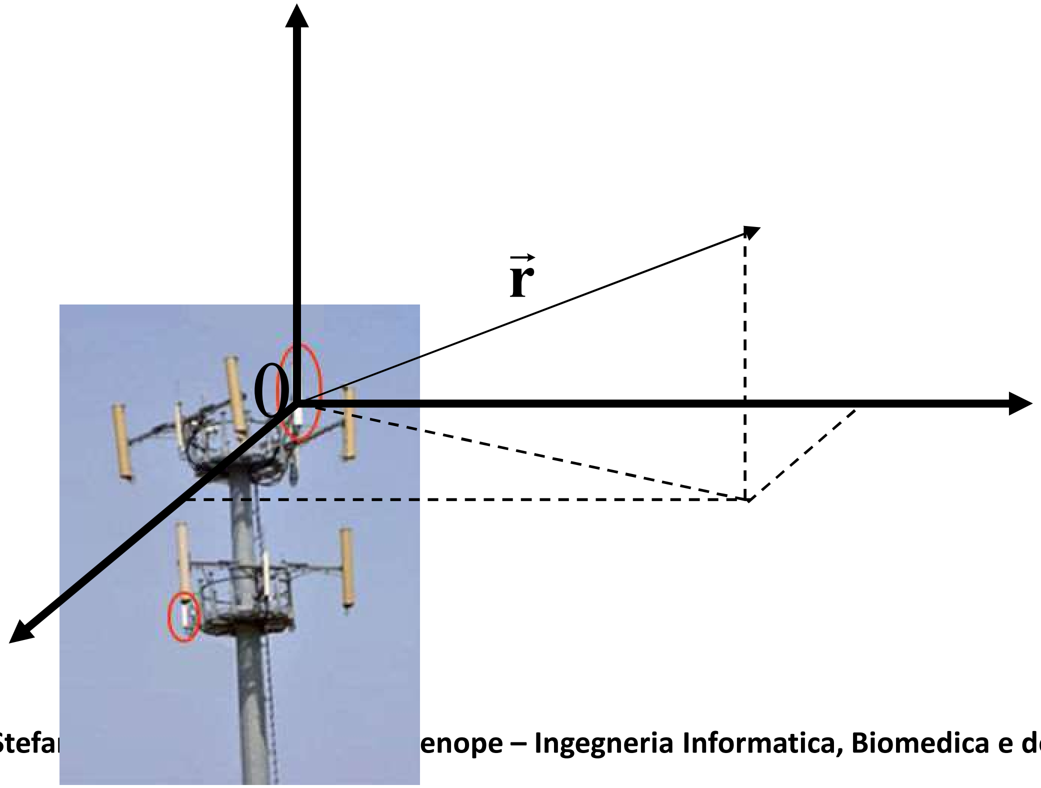
# Sistema di riferimento sferico

… è molto diffuso in problemi di elettromagnetismo



# Sistema di riferimento sferico

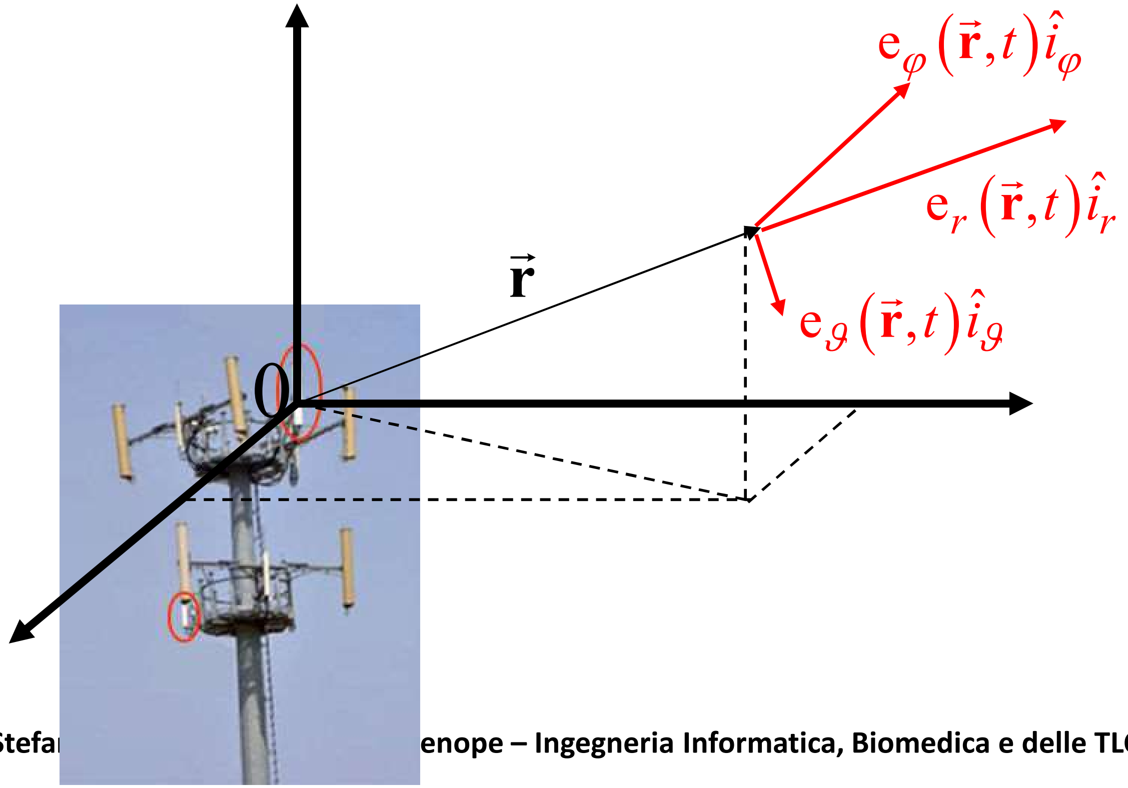
… è molto diffuso in problemi di elettromagnetismo



# Sistema di riferimento sferico

… è molto diffuso in problemi di elettromagnetismo

$$\vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e}_r\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_r + \mathrm{e}_\vartheta\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{e}_\varphi\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_\varphi$$



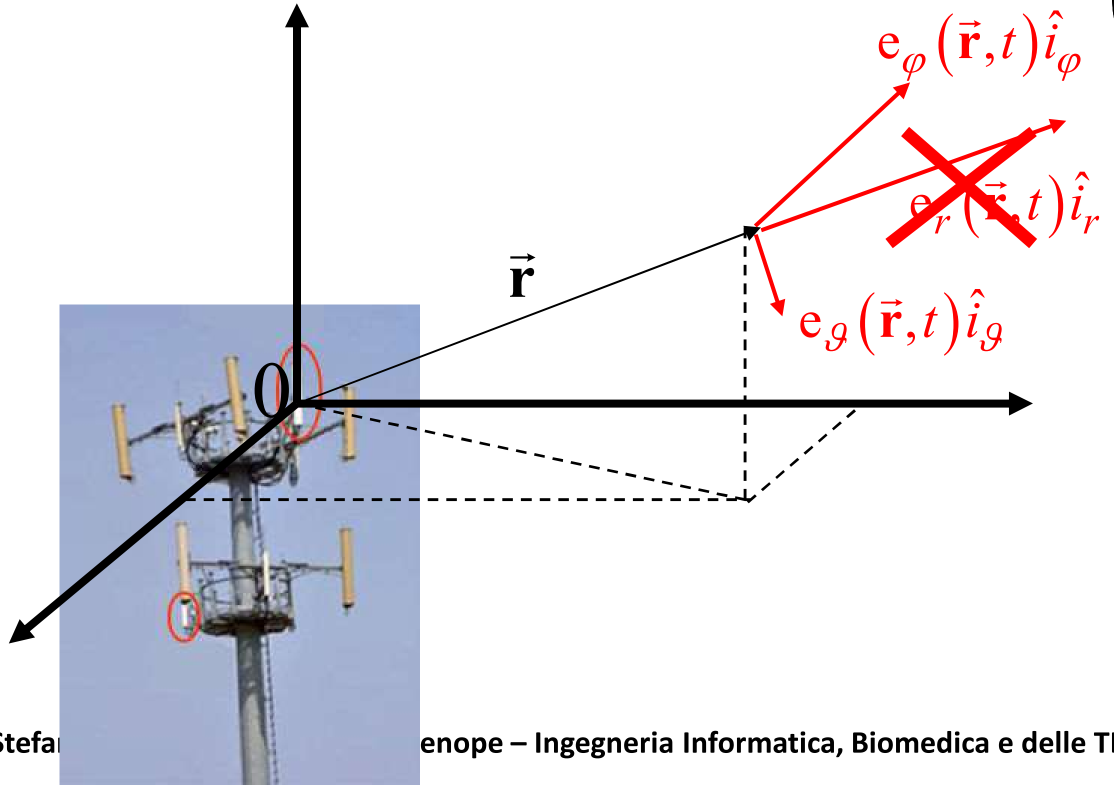

$$\vec{\mathbf{r}} = \left(r,\vartheta,\varphi\right)$$

# Sistema di riferimento sferico

… è molto diffuso in problemi di elettromagnetismo

$$\vec{\mathbf{e}} = \cancel{e_r(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_r} + e_\vartheta(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\vartheta + e_\varphi(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\varphi$$

a grande distanza, cioè per *r* *"sufficientemente elevato"*

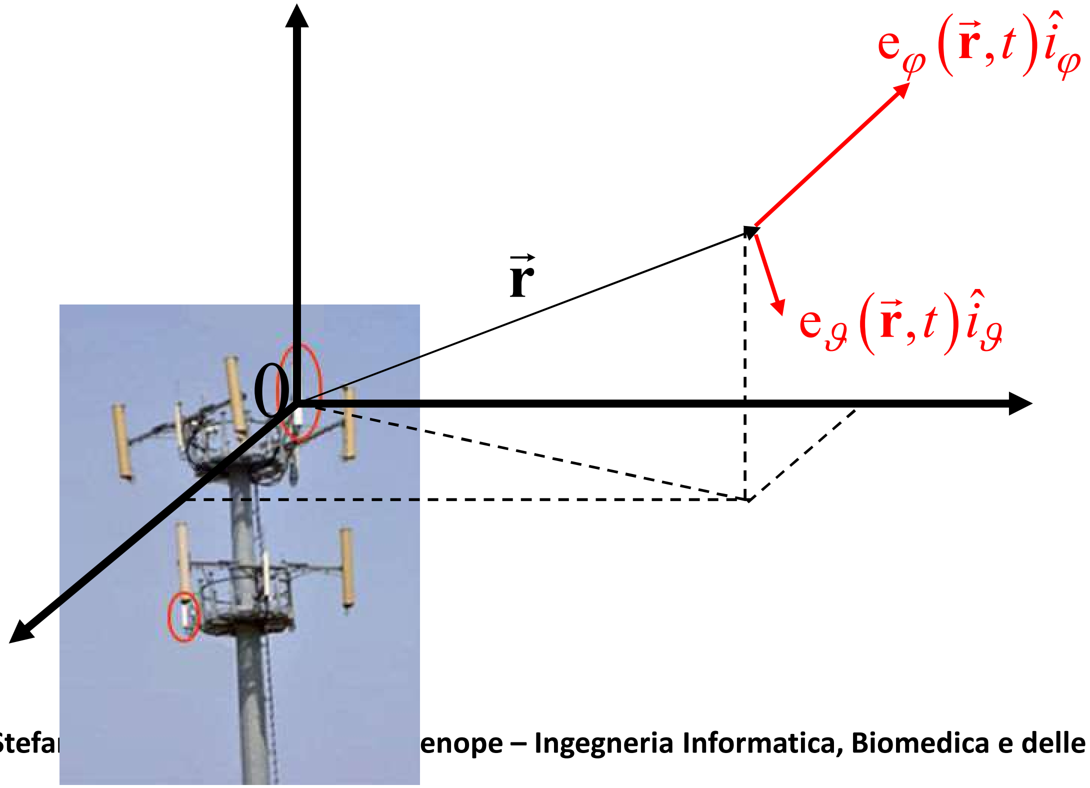



$$\vec{\mathbf{r}} = (r, \vartheta, \varphi)$$

# Sistema di riferimento sferico

… è molto diffuso in problemi di elettromagnetismo

$$\vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e}_\vartheta(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{e}_\varphi(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\varphi$$




a grande distanza,
cioè per *r*
*"sufficientemente elevato"*

$$\vec{\mathbf{r}} = (r, \vartheta, \varphi)$$

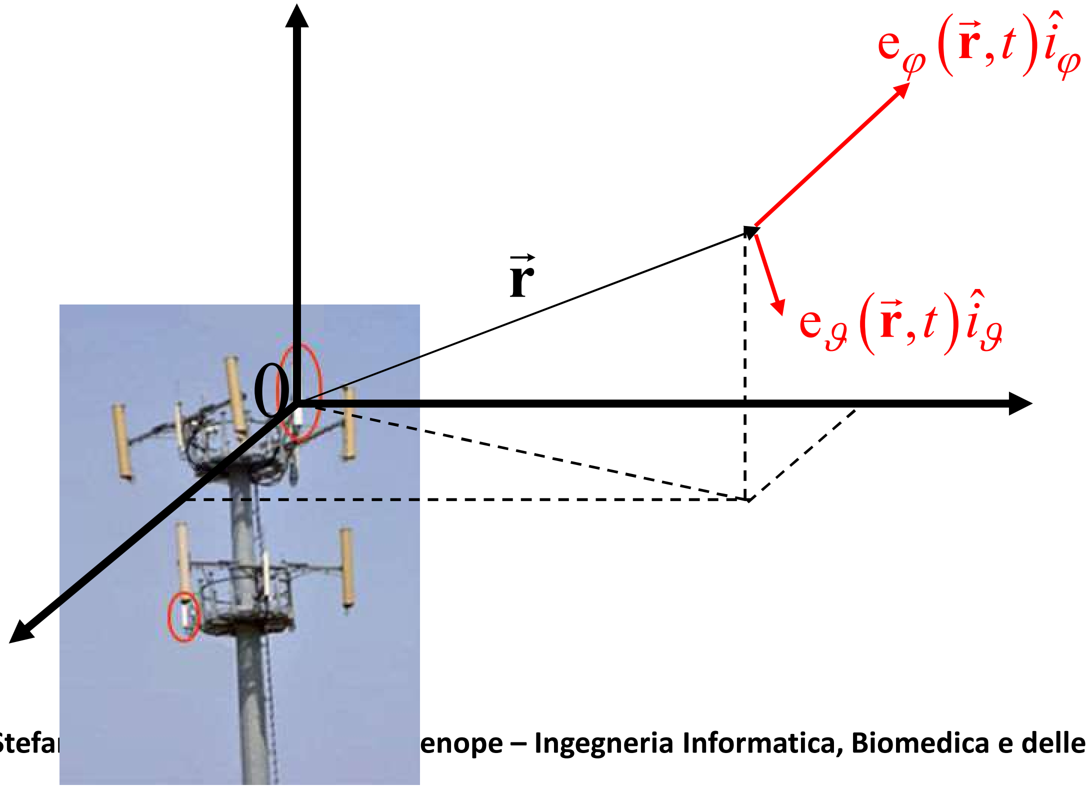
# Sistema di riferimento sferico

… è molto diffuso in problemi di elettromagnetismo

$$\vec{\mathbf{e}} = \mathrm{e}_{\vartheta}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_{\vartheta} + \mathrm{e}_{\varphi}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\hat{i}_{\varphi}$$

$$\left|\vec{\mathbf{e}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)\right| \propto \frac{1}{r}$$

a grande distanza, cioè per *r* *“sufficientemente elevato”*




$$\vec{\mathbf{r}} = \left(r,\vartheta,\varphi\right)$$

# Campo elettromagnetico

Il **campo elettrico** dipende dallo **spazio** e dal **tempo**

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

$$\vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathrm{e}_r(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_r + \mathrm{e}_\vartheta(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{e}_\varphi(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\varphi$$

# Campo elettromagnetico

Il <u>**campo elettrico**</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

$$\vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathrm{e_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{e_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{e_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathrm{e}_r(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_r + \mathrm{e}_\vartheta(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{e}_\varphi(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\varphi$$

Il <u>**campo magnetico**</u> dipende dallo <u>**spazio**</u> e dal <u>**tempo**</u>

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

$$\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathrm{h_x}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_x + \mathrm{h_y}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_y + \mathrm{h_z}(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_z$$

$$\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \mathrm{h}_r(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_r + \mathrm{h}_\vartheta(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\vartheta + \mathrm{h}_\varphi(\vec{\mathbf{r}},t)\hat{i}_\varphi$$

# Campo elettromagnetico

Perché si parla di campo elettromagnetico?

Il campo elettrico che fine ha fatto?

Il campo magnetico che fine ha fatto?

# Campo elettromagnetico

**James Clerk Maxwell 1831-1879**

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\dfrac{\partial \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{\partial \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0 \end{cases}$$

*(Il lavoro di Maxwell) ...”è stato il più profondo e il più fruttuoso che la fisica ha sperimentato dal tempo di Newton*”

Albert Einstein

# Campo elettromagnetico

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\[2ex]
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\[2ex]
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\[2ex]
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mu : \text{permeabilità magnetica} \\
\varepsilon : \text{permittività}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di corrente} \\
\rho(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di carica}
\end{cases}
$$

# Campo elettromagnetico

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

... nel vuoto

$$
\begin{cases}
\mu = 4\pi \times 10^{-7} \quad Henry/m \\
\varepsilon = 8.8 \times 10^{-12} \quad Farad/m
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di corrente} \\
\rho(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di carica}
\end{cases}
$$

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \cancel{\dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t}} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \cancel{\dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t}} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

nel caso stazionario: derivate rispetto al tempo nulle

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{\mathbf{r}}) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0
\end{cases}
$$

nel caso stazionario: derivate rispetto al tempo nulle

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \end{cases}$$

nel caso stazionario: derivate rispetto al tempo nulle

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

Nell'ipotesi di stazionarietà, il campo elettrico e il campo magnetico sono indipendenti l'uno dall'altro

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \end{cases}$$

nel caso stazionario: derivate rispetto al tempo nulle

# Campo elettromagnetico

## Il campo elettrico e il campo magnetico sono legati?

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

Nel caso più generale in cui si rimuove l'ipotesi di stazionarietà, il campo elettrico e il campo magnetico sono strettamente legati!!

Non ha senso parlare di campo elettrico senza parlare di campo magnetico

# Campo elettromagnetico

Perché si parla di campo elettromagnetico?

Il campo elettrico che fine ha fatto?

Il campo magnetico che fine ha fatto?

# Campo elettromagnetico

Perché si parla di campo elettromagnetico?

Il campo elettrico che fine ha fatto?

Il campo magnetico che fine ha fatto?

Nel caso più generale in cui si rimuove l'ipotesi di stazionarietà, il campo elettrico e il campo magnetico sono strettamente legati!!

Non ha senso parlare di campo elettrico senza parlare di campo magnetico.

# Campo elettromagnetico

..chi è la causa?

… chi è l’effetto?

# Campo elettromagnetico

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di corrente} \\
\rho(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di carica}
\end{cases}
$$

… solito scenario …

# Campo elettromagnetico

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di corrente} \\
\rho(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di carica}
\end{cases}
$$

sorgenti!!

… solito scenario …

# Campo elettromagnetico

..chi è la causa?
$$\begin{cases} \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di corrente della sorgente} \\ \rho(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di carica della sorgente} \end{cases}$$

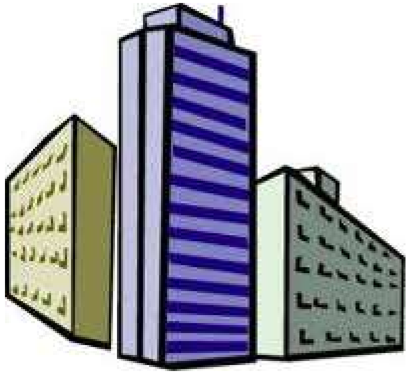
...chi è l'effetto?
$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t): \text{campo elettrico} \\ \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t): \text{campo magnetico} \end{cases}$$

# Campo elettromagnetico

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di corrente} \\
\rho(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di carica}
\end{cases}
$$

sorgenti!!



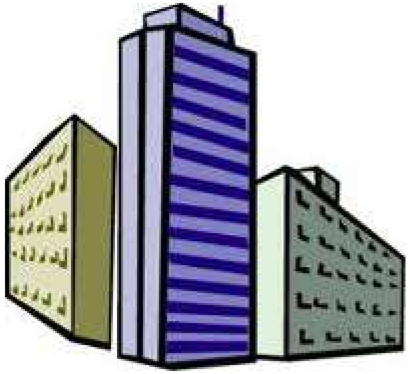
… scenario più complicato …

# Campo elettromagnetico

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di corrente} \\
\rho(\vec{\mathbf{r}},t): \text{densità di carica}
\end{cases}
$$

sorgenti!!



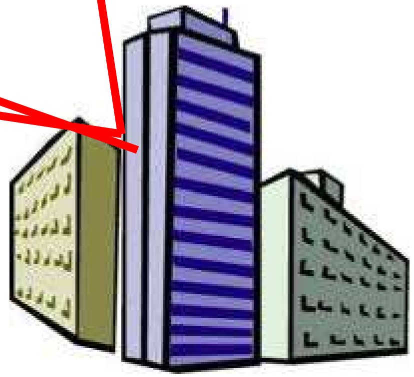
… scenario più complicato …

# Campo elettromagnetico

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di corrente} \\ \rho(\vec{\mathbf{r}},t) : \text{densità di carica} \end{cases}$$

sorgenti!!



… scenario più complicato …

# Maxwell equations
# Time, Fourier and Phasor domain

**Time domain**

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{r}},t) = -\dfrac{\partial \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \dfrac{\partial \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \rho(\vec{\mathbf{r}},t) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \rho(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}},t) = 0$$

**Frequency domain**

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = -j\omega \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = j\omega \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) + \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = \rho(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = 0 \end{cases}$$

$$j\omega\rho(\vec{\mathbf{r}},\omega) + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = 0$$

**Phasor domain**

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -j\omega_0 \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = j\omega_0 \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}) = \rho(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \end{cases}$$

$$j\omega_0\rho(\vec{\mathbf{r}}) + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0$$

# Constitutive relationships

Even assuming knowledge of the impressed sources $\vec{\mathbf{j}}_0(\vec{\mathbf{r}},t);\rho_0(\vec{\mathbf{r}},t)$

Number of independent scalar equations: 7

Number of unknown scalar quantities: 16

Maxwell equations involve a number of unknowns larger than the number of equations!

The additional missing equations are provided by the **constitutive relationships**, which describe interaction of fields and matter from a macroscopic point of view

# Constitutive relationships

Even assuming knowledge of the impressed sources $\vec{\mathbf{j}}_0(\vec{\mathbf{r}},t);\rho_0(\vec{\mathbf{r}},t)$

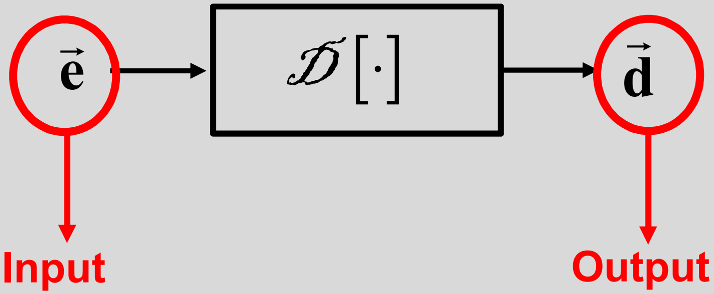
Number of independent scalar equations: 7

Number of unknown scalar quantities: 16

Maxwell equations involve a number of unknowns larger than the number of equations!

The additional missing equations are provided by the **constitutive relationships**, which describe interaction of fields and matter from a macroscopic point of view

$$\vec{\mathbf{d}} = \mathscr{D}[\vec{\mathbf{e}}]$$
$$\vec{\mathbf{b}} = \mathscr{B}[\vec{\mathbf{h}}]$$
$$\vec{\mathbf{j}} = \mathscr{J}[\vec{\mathbf{e}}]$$



# Constitutive relationships

<table>
<tr><th></th><th>Time domain</th><th>Frequency domain</th><th>Phasor domain</th></tr>
<tr><td>Time-nondispersive<br>Time-invariant<br>Space-nondispersive<br>Space-invariant</td><td>$\vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\varepsilon\vec{\mathbf{e}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)$</td><td colspan="2" rowspan="4">$\vec{\mathbf{D}}=\varepsilon\vec{\mathbf{E}}$<br><br>$\vec{\mathbf{B}}=\mu\vec{\mathbf{H}}$<br><br>$\vec{\mathbf{J}}=\sigma\vec{\mathbf{E}}$</td></tr>
<tr><td>Time-nondispersive<br>Time-invariant<br>Space-nondispersive<br>Space-variant</td><td>$\vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\varepsilon(\vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{e}}\left(\vec{\mathbf{r}},t\right)$</td></tr>
<tr><td>Time-dispersive<br>Time-invariant<br>Space-nondispersive<br>Space-invariant</td><td>$\vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\int dt'\,g_d\left(t-t'\right)\vec{\mathbf{e}}\left(\vec{\mathbf{r}},t'\right)$</td></tr>
<tr><td>Normal media</td><td>$\vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\int dt'\,g_d\left(\vec{\mathbf{r}},t-t'\right)\vec{\mathbf{e}}\left(\vec{\mathbf{r}},t'\right)$</td></tr>
</table>

# Constitutive relationships

**Time-nondispersive**
**Time-invariant**
**Space-nondispersive**
**Space-invariant**

**Time-nondispersive**
**Time-invariant**
**Space-nondispersive**
**Space-variant**

**Time-dispersive**
**Time-invariant**
**Space-nondispersive**
**Space-invariant**

**Normal media**

**Frequency domain**

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = -j\omega\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = j\omega\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)+\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)+\vec{\mathbf{J}}_0(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = \rho(\vec{\mathbf{r}},\omega)+\rho_0(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = 0 \end{cases}$$

**Phasor domain**

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -j\omega_0\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = j\omega_0\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}})+\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}})+\vec{\mathbf{J}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{r}}) = \rho(\vec{\mathbf{r}})+\rho_0(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}};\quad \vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}};\quad \vec{\mathbf{J}} = \sigma\vec{\mathbf{E}};$$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = -j\omega\mu\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = j\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)+\sigma\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega)+\vec{\mathbf{J}}_0(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla\cdot\varepsilon\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = \rho(\vec{\mathbf{r}},\omega)+\rho_0(\vec{\mathbf{r}},\omega) \\ \nabla\cdot\mu\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}},\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -j\omega_0\mu\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla\times\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = j\omega_0\varepsilon\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})+\sigma\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})+\vec{\mathbf{J}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla\cdot\varepsilon\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \rho(\vec{\mathbf{r}})+\rho_0(\vec{\mathbf{r}}) \\ \nabla\cdot\mu\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \end{cases}$$

# Plane Waves (Fourier Domain)

**Time dispersive & lossy**

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) - j\varepsilon_2(\omega) \\ \mu(\omega) = \mu_1(\omega) - j\mu_2(\omega) \\ \sigma : real \end{cases}$$

$$E_x(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-jkz} + E^-(\omega)e^{jkz}$$

$$\zeta H_y(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-jkz} - E^-(\omega)e^{jkz}$$

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta(\omega) - j\alpha(\omega) \qquad \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

**Time nondispersive & lossless**

$$\begin{cases} \varepsilon : real \\ \mu : real \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

$$E_x(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z} + E^-(\omega)e^{+j\beta z}$$

$$\zeta H_y(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z} - E^-(\omega)e^{j\beta z}$$

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta(\omega) \qquad \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

# Plane Waves (Fourier Domain)

$$E_x^+(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z}$$

$$e_x^+(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int E_x^+(z,\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad = \frac{1}{2\pi}\int E^+(\omega)e^{-j\beta z}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int E^+(\omega)e^{-j\frac{\omega}{c}z}e^{j\omega t}d\omega \quad = \frac{1}{2\pi}\int E^+(\omega)e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}d\omega$$

**Time nondispersive & lossless**

$$\begin{cases} \varepsilon : real \\ \mu : real \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

$$E_x^+(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z}$$

$$\zeta H_y^+(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta(\omega) = \frac{\omega}{c}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

# Plane Waves (Fourier Domain)

$$E_x^+(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z}$$

$$e_x^+(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int E_x^+(z,\omega)e^{j\omega t}d\omega \;= \frac{1}{2\pi}\int E^+(\omega)e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}d\omega$$

$$e_x^+(z=0,t) = \frac{1}{2\pi}\int E^+(\omega)e^{j\omega t}d\omega \;= f(t)$$

$$e_x^+(z>0,t) \;= \frac{1}{2\pi}\int E^+(\omega)e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}d\omega \;= f\left(t-\frac{z}{c}\right) = f\left[-\frac{1}{c}(z-ct)\right] = f\left[(z-ct)\right]$$

**Time nondispersive & lossless**

$$\begin{cases} \varepsilon : real \\ \mu : real \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

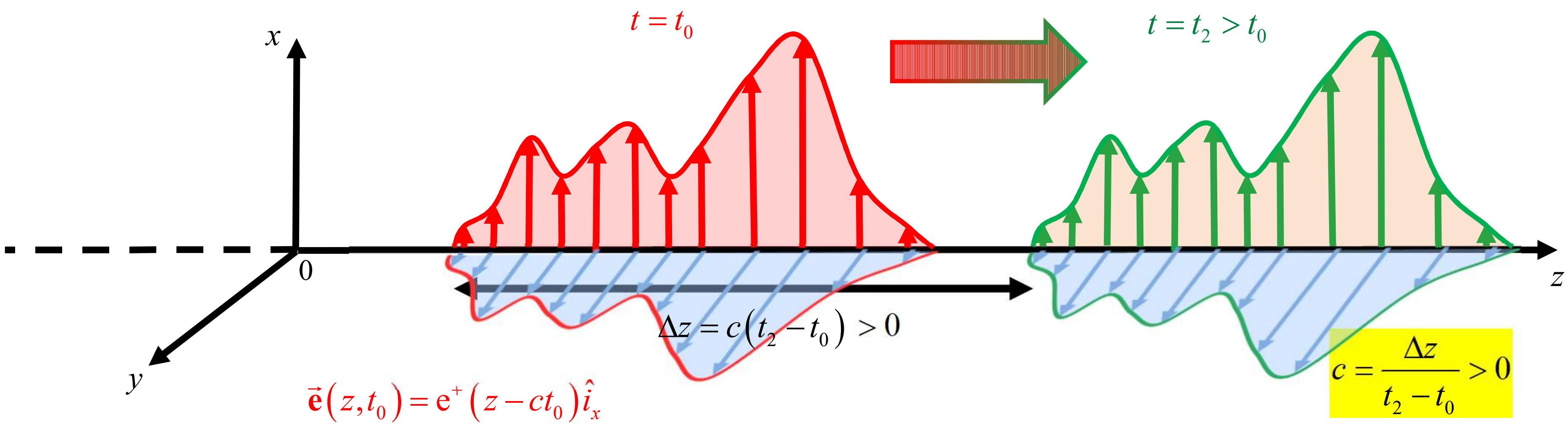
$$E_x^+(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z}$$

$$\zeta H_y^+(z,\omega) = E^+(\omega)e^{-j\beta z}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta(\omega) \;= \frac{\omega}{c} \qquad \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

# Plane Waves




$$\vec{\mathbf{e}}(z,t_0) = \mathrm{e}^+(z - ct_0)\hat{i}_x$$

$$\vec{\mathbf{e}}(z,t_2) = \mathrm{e}^+(z - ct_2)\hat{i}_x = \mathrm{e}^+(z - ct_0 + ct_0 - ct_2)\hat{i}_x = \mathrm{e}^+(z - ct_0 - c[t_2 - t_0])\hat{i}_x$$

The electromagnetic perturbation **propagates** without deformation and with constant speed *c* along the positive sense of the z-axis

$\begin{cases} e^+(z - ct) \\ h^+(z - ct) \end{cases}$ is referred to as electromagnetic **<u>progressive</u> plane wave**