

MATEMATICA II - Esercitazione

F. Feo

1) Siano assegnate le seguenti funzioni

$$f(x, y) = x^8 - y^8$$
$$f(x, y) = y^2 - x^2 - \frac{y^4}{4}.$$

- i) Classificare i punti critici
- ii) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$.
- iii) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1, 0)$ e nella direzione della retta $y = -x$.

2) Dato il seguente campo vettoriale \mathbf{F}

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{e^x} + 2x \log(y^2 + 1), \frac{2x^2 y}{y^2 + 1} \right)$$

- (i) Determinare l'insieme di definizione.
- (ii) Stabilire se è conservativo e calcolarne tutti i potenziali.
- (iii) Calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo l'arco di curva $\gamma(t) = \left(t^2 - 3t, \frac{t}{t^2 + 1} \right)$, $t \in [0, 3]$.

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

$$\text{con } D = \left\{ (x, y) : x > 0, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \frac{1}{x}, x \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}.$$

4) Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_S \frac{z^2}{\sqrt{1-x^2}} d\sigma$$

dove S è la porzione di superficie di equazione parametriche

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = v - u \\ z = \sin u \end{cases}$$

con $(u, v) \in D$, dove D è il triangolo del piano u, v di vertici $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) .

5) Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2^n}{1 + 4^n} \log^n x.$$