Trasformata di Fourier

Filomena Feo

Dipartimento di Ingegneria
Università degli Studi di Napoli "Parthenope", Italy

Matematica II

Definizione

Data una funzione $f : t \in \mathbb{R} \to f(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di f è la funzione

$$\widehat{f} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

Definizione

Data una funzione $f : t \in \mathbb{R} \to f(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di f è la funzione

$$\widehat{f} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

Controlliamo che la definizione è ben posta

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t) e^{-j\omega t}\right|\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left|e^{-j\omega t}\right|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \\ &< +\infty \text{ poichè } f \text{ è sommabile}\end{aligned} \tag{1}$$

ricordando che $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$.

Definizione

Data una funzione $f : t \in \mathbb{R} \to f(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di f è la funzione

$$\widehat{f} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

Controlliamo che la definizione è ben posta

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)e^{-j\omega t}\right|\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left|e^{-j\omega t}\right|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \\ &< +\infty \text{ poichè } f \text{ è sommabile} \end{aligned} \tag{1}$$

ricordando che $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$.

Osserviamo che

$$\widehat{f}(0) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi\nu$ con ν frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{f}$ come funzione della frequenza ν e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{f}(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t}\, dt.$$

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi\nu$ con ν frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{f}$ come funzione della frequenza ν e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{f}(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t}\, dt.$$

La funzione $\widehat{f}(\omega)$ si denota anche con $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$.

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi\nu$ con ν frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{f}$ come funzione della frequenza ν e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{f}(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t}\,dt.$$

La funzione $\widehat{f}(\omega)$ si denota anche con $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$.

A volte si usa anche la notazione $F(\omega)$.

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi\nu$ con ν frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{f}$ come funzione della frequenza ν e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{f}(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t}\, dt.$$

La funzione $\widehat{f}(\omega)$ si denota anche con $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$.

A volte si usa anche la notazione $F(\omega)$.

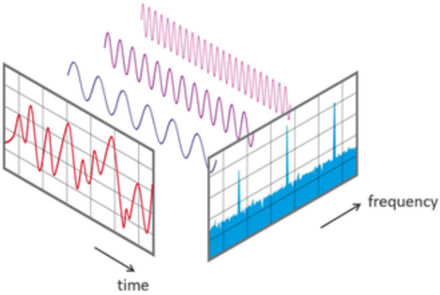
L'operatore Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ associa alla funzione sommabile $f(t)$ una nuova funzione $\widehat{f}(\omega)$, i.e.

$$\mathcal{F} : f(t) \to \widehat{f}(\omega)$$

Nota storica

La trasformata di Fourier è una trasformata integrale, cioè un operatore che trasforma una funzione in un'altra funzione, sviluppata dal matematico francese Jean Baptiste Joseph Fourier nel 1822, nel suo trattato "Théorie analytique de la chaleur".
Trova numerose applicazioni nella fisica e nell'ingegneria ovvero uno degli strumenti matematici maggiormente utilizzati nell'ambito delle scienze pure e applicate, permettendo di scrivere una funzione dipendente dal tempo come combinazione lineare continua di funzioni di base esponenziali, dandone in questo modo una rappresentazione nel dominio delle frequenze.

Quando applichiamo la Trasformata di Fourier i dati non sono cambiati, ma li stiamo guardando in maniera differente. L'esempio più comune può essere dato dal guardare i dati nel dominio della frequenza. Sommando tutti le onde nel dominio della frequenza si otterrebbe il segnale originale.



Un vantaggio: le operazioni in un determinato dominio hanno delle operazioni corrispondenti in un altro dominio. Ad esempio la derivazione in uno corrisponde alla moltiplicazione di frequenze nell'altro. In questo modo le equazioni differenziali risultano molto più facili da risolvere nel dominio delle frequenze.
La Trasformata di Fourier è uno strumento importantissimo nell'analisi dei segnali, lavorazioni di immagini, ottica, ecc...

Approfondimenti

Video 1
Video 2
Video 3

Prime proprietá

Usando la (1) otteniamo che

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$$

per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Prime proprietá

Usando la (1) otteniamo che

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt$$

per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Ovvero la funzione $\widehat{f}(\omega)$ è limitata. In particolare il modulo di $\widehat{f}(\omega)$ è maggiorato dall'integrale del modulo di $f(t)$.

Esempio

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

(2)
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esempio

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

(2) $$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per poterla trasformare coma prima cosa controlliamo se è sommabile. È una funzione reale non negativa, continua in $[a, b]$ e nulla altrove e quindi è sommabile (=integrabile in questo caso).

Esempio

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2}$$

Per poterla trasformare coma prima cosa controlliamo se è sommabile. È una funzione reale non negativa, continua in $[a, b]$ e nulla altrove e quindi è sommabile (=integrabile in questo caso).
Procediamo al calcolo.

Esempio

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{a}^{b} e^{-j\omega t}\, dt$$

Esempio

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \begin{cases} \left.\dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_a^b = \dfrac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\[2ex] \int_a^b dt = b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \begin{cases} \left.\dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_a^b = \dfrac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \int_a^b dt = b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \begin{cases} \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_a^b = \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \int_a^b dt = b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Vale la seguente proposizione.

Proposizione

Se $f(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{f}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

(senza dimostrazione)

La limitatezza è giá stata provata (vedere slide dopo la definizione).

Proprietà della Trasformata di Fourier

Vale la seguente proposizione.

Proposizione

Se $f(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{f}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

(senza dimostrazione)

La limitatezza è giá stata provata (vedere slide dopo la definizione).

L'operatore Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ associa alla funzione sommabile $f(t)$ una funzione $\widehat{f}(\omega)$ continua e limitata su $\mathbb{R}$ e infinitesima all'infinito.

Proprietà della Trasformata di Fourier

Vale la seguente proposizione.

Proposizione

Se $f(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{f}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

(senza dimostrazione)

La limitatezza è giá stata provata (vedere slide dopo la definizione).

L'operatore Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ associa alla funzione sommabile $f(t)$ una funzione $\widehat{f}(\omega)$ continua e limitata su $\mathbb{R}$ e infinitesima all'infinito.

Osserviamo che la proprietà $\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$ non è sufficiente per concludere che $\widehat{f}(\omega)$ è sommabile.

Esempio: Trasformata dell'impulso

Sia $T > 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esempio: Trasformata dell'impulso

Sia $T > 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che è sommabile ($a = -T/2, b = T/2$) e che la sua trasformata vale

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

Esempio: Trasformata dell'impulso

Sia $T > 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che è sommabile ($a = -T/2, b = T/2$) e che la sua trasformata vale

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

Dalla formula di Eulero ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = T\frac{\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\frac{T}{2}\omega} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

e

$$\widehat{f}(0) = T$$

Esempio: Trasformata dell'impulso

Sia $T > 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che è sommabile ($a = -T/2, b = T/2$) e che la sua trasformata vale

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

Dalla formula di Eulero ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$)

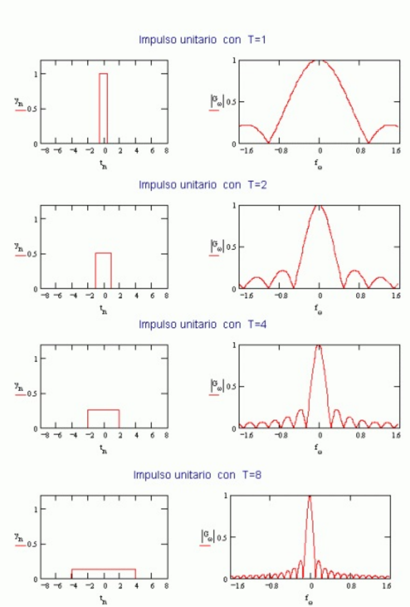
$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = T\frac{\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\frac{T}{2}\omega} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

e

$$\widehat{f}(0) = T$$

Osservazione. Si osservi che $f(t)$ e $\widehat{f}(\omega)$ sono pari, reali di variabile reale.

Trasformata di Fourier dell'impulso



Trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$

È sommabile su $\mathbb{R}$.

Sono possibili due motivazioni.

- (usando i criteri di sommabilità) $f(t)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{e^{-|t|}}{\frac{1}{|t|^{\alpha}}} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$

È sommabile su $\mathbb{R}$.

Sono possibili due motivazioni.

- (usando i criteri di sommabilità) $f(t)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{e^{-|t|}}{\frac{1}{|t|^\alpha}} = 0 \quad \forall\alpha > 0$$

- (usando la definizione di integrale in senso improprio/generalizzato) Usando la simmetria della funzione basta infatti far vedere che

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-|t|}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{e^{-|t|}}{-1} \right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} -e^{-|b|} + 1 = 1$$

Trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt$$

Trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt$$

Trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt$$

Si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt = 0$$

perchè la funzione integranda è dispari. Inoltre

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

perchè la funzione integranda è pari.

Trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt$$

Si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt = 0$$

perchè la funzione integranda è dispari. Inoltre

$$\widehat{f}(\omega) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

perchè la funzione integranda è pari.
Infatti

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t} \cos(\omega t)\, dt = -e^{-t}\cos(\omega t)\Big]_0^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \omega \sin(\omega t)\, dt$$

$$= 1 - \omega\left[-\sin(\omega t) e^{-t}\Big]_0^{\infty} + \omega \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\, dt\right] = 1 - \omega^2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\, dt$$

Allora

$$(1+\omega^2)\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = 1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Allora

$$(1+\omega^2)\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = 1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{1+\omega^2}$$

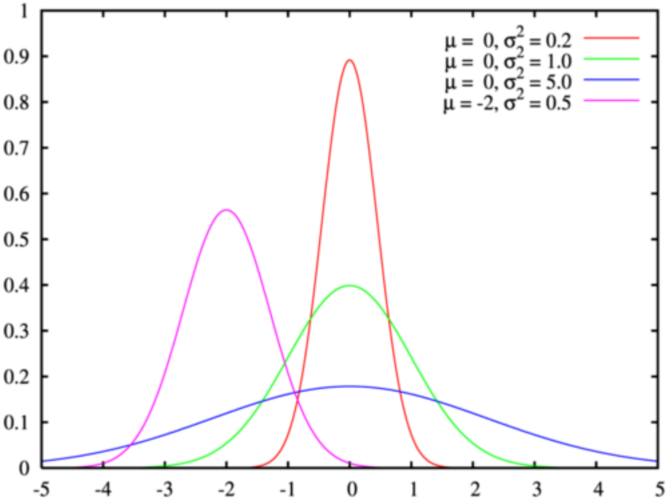
$$\widehat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Osservazione 1. Si osservi che $f(t)$ e $\widehat{f}(\omega)$ sono reali, pari di variabile reale.

Osservazione 2. Come noto dalla Proposizione precedente, $\widehat{f}(\omega)$ è continua limitata e infinitesima.

Gaussiana

$$f(t) = e^{-\frac{|t-\mu|^2}{\sigma^2}}$$



Trasformata della gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

Trasformata della gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

Trasformata della gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

Trasformata della gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R$$

$$= \pi \left(-e^{-R^2} + 1\right)$$

Trasformata della gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R$$

$$= \pi\left(-e^{-R^2}+1\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \pi\left(-e^{-R^2}+1\right) = \pi$$

Trasformata della gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R$$

$$= \pi \left(-e^{-R^2} + 1\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \pi \left(-e^{-R^2} + 1\right) = \pi$$

Ricordando le formule di riduzione e osservando che $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-(x^2)} e^{-(y^2)}$ si ha

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy == \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy\right)$$

quindi l'asserto.

Trasformata della Gaussiana.

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Sappiamo che è sommabile su $\mathbb{R}$.

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-j\omega t}\, dt$$

Trasformata della Gaussiana.

Sia $f(t) = e^{-t^2}$. Sappiamo che è sommabile su $\mathbb{R}$.

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t+j\frac{\omega}{2}\right)^2} dt$$

L'ultimo integrale è l'integrale della funzione e^{-z^2} con $z \in \mathbb{C}$ su una retta parallela all'asse x e si dimostra (usando le tecniche di analisi complessa) che è eguale a

$$e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2}\, d\sigma = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $f_1(t), f_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2(t)](\omega).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $f_1(t), f_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[f_2(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $f_1(t), f_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[f_2(t)](\omega) = \frac{2\sin(1\omega)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](0) = 2 + 6$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $f_1(t), f_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[f_2(t)](\omega) = \frac{2\sin(1\omega)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](0) = 2 + 6$$

$$\mathcal{F}[5 f_2(t)](\omega) = 5\mathcal{F}[f_2(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $f_1(t), f_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[f_2(t)](\omega) = \frac{2\sin(1\omega)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)](0) = 2 + 6$$

$$\mathcal{F}[5f_2(t)](\omega) = 5\mathcal{F}[f_2(t)](\omega) = 5\frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0, \quad \mathcal{F}[5f_2(t)](0) = 5 \times 6$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|t+2|}$.

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|t+2|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t+2|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{j2\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|t+2|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t+2|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{j2\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{j2\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|t+2|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t+2|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{j2\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{j2\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Calcolare la trasformata di $e^{-|t-3|}$.

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|t+2|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t+2|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{j2\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{j2\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Calcolare la trasformata di $e^{-|t-3|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t-3|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|t+2|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t+2|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{j2\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{j2\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Calcolare la trasformata di $e^{-|t-3|}$. Se $f(t) = e^{-|t|}$ si ha

$$\mathcal{F}[e^{-|t-3|}](\omega) = \mathcal{F}[f(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t-1)](\omega)$.

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t-1)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) =$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t-1)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f(t-1)](0) = e^{-j0}2 = 2$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t-1)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f(t-1)](0) = e^{-j0}2 = 2$$

Osserva che

$$\mathcal{F}[f(t-1)](0) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \mathcal{F}[f(t)](0)$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t+2)](\omega)$.

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t+2)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{2j\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) =$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(t+2)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(t+2)](\omega) = e^{2j\omega}\mathcal{F}[f(t)](\omega) = e^{2j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f(t+2)](0) = e^{2j0}2 = 2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto al riscalamento

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto al riscalamento

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|4t|}$.

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto al riscalamento

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|4t|}$.

Se $f(t) = e^{-|t|}$ allora

$$\mathcal{F}[e^{-4|t|}](\omega) = \mathcal{F}[f(4t)](\omega) = \frac{1}{4}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{2}{1+\frac{\omega^2}{4^2}}$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto al riscalamento

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|4t|}$.

Se $f(t) = e^{-|t|}$ allora

$$\mathcal{F}[e^{-4|t|}](\omega) = \mathcal{F}[f(4t)](\omega) = \frac{1}{4}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{2}{1+\frac{\omega^2}{4^2}}$$

Calcolare la trasformata di $e^{-|\frac{t}{6}|}$.

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto al riscalamento

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

Calcolare la trasformata di $e^{-|4t|}$.

Se $f(t) = e^{-|t|}$ allora

$$\mathcal{F}[e^{-4|t|}](\omega) = \mathcal{F}[f(4t)](\omega) = \frac{1}{4}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{2}{1+\frac{\omega^2}{4^2}}$$

Calcolare la trasformata di $e^{-|\frac{t}{6}|}$.

Se $f(t) = e^{-|t|}$ allora

$$\mathcal{F}[e^{-|\frac{t}{6}|}](\omega) = \mathcal{F}[f\left(\frac{t}{6}\right)](\omega) = 6\mathcal{F}[f(t)](6\omega) = 6\frac{2}{1+6^2\omega^2}$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

Risoluzione.

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) =$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2\sin(\frac{\omega}{3})}{\frac{\omega}{3}} \quad \text{per } \omega \neq 0 \quad \mathcal{F}[f(3t)](0) = \frac{1}{3}2$$

Calcolare $\mathcal{F}[f\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega)$.

Risoluzione.

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2\sin(\frac{\omega}{3})}{\frac{\omega}{3}} \quad \text{per } \omega \neq 0 \quad \mathcal{F}[f(3t)](0) = \frac{1}{3}2$$

Calcolare $\mathcal{F}[f\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega) = 5\mathcal{F}[f(t)](-5\omega) =$$

Esercizio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $\mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2\sin(\frac{\omega}{3})}{\frac{\omega}{3}} \quad \text{per } \omega \neq 0 \quad \mathcal{F}[f(3t)](0) = \frac{1}{3}2$$

Calcolare $\mathcal{F}[f\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega)$.

Risoluzione.

$$\mathcal{F}[f\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega) = 5\mathcal{F}[f(t)](-5\omega) = 5\frac{2\sin(-5\omega)}{-5\omega} = 5\frac{2\sin(5\omega)}{5\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[f\left(-\frac{t}{5}\right)](0) = 5 \times 2$$

Trasformata della Gaussiana

$$f_a(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$$

Sia $f_a(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$. Bisogna pensarla come funzione riscalata di $f(t) = e^{-t^2}$ e quindi $f_a(t) = e^{-(\sqrt{a}t)^2} = f(\sqrt{a}t)$.

$$\mathcal{F}[f_a(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

È ancora una gaussiana!

Proprietà della Trasformata di Fourier

Le due proprità precedenti possono essere scritte usando un'unica formula.

Proprietà

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\frac{\omega}{c}} \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[f(t)] \left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Le due proprità precedenti possono essere scritte usando un'unica formula.

Proprietà

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[f(ct - t_0)](\omega) = e^{-jt_0 \frac{\omega}{c}} \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[f(t)] \left(\frac{\omega}{c} \right).$$

Infatti combinado le due precedenti proprità si ha che

$$\mathcal{F}[f(ct - t_0)](\omega) = e^{-jt_0 \frac{\omega}{c}} \mathcal{F}[f(ct)](\omega) = e^{-jt_0 \frac{\omega}{c}} \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[f(t)] \left(\frac{\omega}{c} \right)$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[e^{jt} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - 1) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[e^{jt} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - 1) = \frac{2\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} \quad \text{per } \omega \neq 1, \mathcal{F}[e^{jt} f(t)](1) = \mathcal{F}[f(t)](0) = 2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[e^{jt} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - 1) = \frac{2\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} \quad \text{per } \omega \neq 1, \mathcal{F}[e^{jt} f(t)](1) = \mathcal{F}[f(t)](0) = 2$$

$$\mathcal{F}[e^{-2jt} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega + 2) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[e^{jt} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - 1) = \frac{2\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} \quad \text{per } \omega \neq 1, \mathcal{F}[e^{jt} f(t)](1) = \mathcal{F}[f(t)](0) = 2$$

$$\mathcal{F}[e^{-2jt} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega + 2) = \frac{2\sin(\omega + 2)}{\omega + 2} \quad \text{per } \omega \neq -2$$

$$\mathcal{F}[e^{-2jt} f(t)](-2) = \mathcal{F}[f(t)](0) = 2$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

1)

$$\mathcal{F}[f_1(t-1) - f_2(t)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

1)

$$\mathcal{F}[f_1(t-1) - f_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t-1)](\omega) - \mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

1)

$$\mathcal{F}[f_1(t-1) - f_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t-1)](\omega) - \mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[f_1(t)](\omega) - \mathcal{F}[f_2(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(\omega)}{\omega} - \frac{2\sin(3\omega)}{\omega}$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[f_1(4t-1) - 2f_2(-4t+5)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

2)

$$\mathcal{F}[f_1(4t-1) - 2f_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[f_2(-4t+5)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

2)

$$\mathcal{F}[f_1(4t-1) - 2f_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[f_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega) - 2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

2)

$$\mathcal{F}[f_1(4t-1) - 2f_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[f_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega) - 2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega) - 2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

$$=$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\in[-1,1]\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\in[-3,3]\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Calcolare per $\omega\neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[f_1(4t-1)-2f_2(-4t+5)](\omega)=\mathcal{F}[f_1(4t-1)](\omega)-2\mathcal{F}[f_2(-4t+5)](\omega)$$

$$=e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega)-2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

$$=e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega)-2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

$$=e^{-j\frac{\omega}{4}}\frac{1}{4}\mathcal{F}[f_1(t)](\frac{\omega}{4})-\frac{2}{4}e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(t)](\frac{-\omega}{4})$$

Esercizi

Siano

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[f_1(4t-1) - 2f_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[f_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega) - 2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\mathcal{F}[f_1(4t)](\omega) - 2e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(-4t)](\omega)$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\frac{1}{4}\mathcal{F}[f_1(t)](\frac{\omega}{4}) - \frac{2}{4}e^{-\frac{5}{4}j\omega}\mathcal{F}[f_2(t)](\frac{-\omega}{4})$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{4}}\frac{1}{4}\frac{2\sin(\frac{\omega}{4})}{\frac{\omega}{4}} - \frac{2}{4}e^{-\frac{5}{4}j\omega}\frac{2\sin(-3\frac{\omega}{4})}{\frac{-\omega}{4}}$$

Per casa fare il conto quando $\omega = 0$

Esercizi per casa

Siano

$$f_1(t) = e^{-|t|}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [2,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare

1. $\mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)](\omega)$
2. $\mathcal{F}[-f_1(t) + 3f_2(t)](\omega)$
3. $\mathcal{F}[f_1(t-1) - f_2(t/3)](\omega)$
4. $\mathcal{F}[e^{jt} f_1(t) + f_2(t-2)](\omega)$
5. $\mathcal{F}[e^{-jt} f_1(t) + f_2(t+2)](\omega)$
6. $\mathcal{F}[e^{j(t-1)} f_1(t-1)](\omega)$
7. $\mathcal{F}[e^{j(t+3)} f_1(t+3)](\omega)$
8. $\mathcal{F}[e^{j(t-1)} f_2(t-1)](\omega)$

Esercizio

Siano $f_1(t) = e^{-|t|}$, $f_2(t) = f_1(2t)$, $f_3(t) = f_1(t-3)$, $f_4(t) = f_1(2t-3)$, $f_5(t) = e^{5jt} f_1(t)$. Calcolarne le trasformate.

Esercizio

Siano $f_1(t) = e^{-|t|}$, $f_2(t) = f_1(2t)$, $f_3(t) = f_1(t-3)$, $f_4(t) = f_1(2t-3)$, $f_5(t) = e^{5jt} f_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{f_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

Esercizio

Siano $f_1(t) = e^{-|t|}$, $f_2(t) = f_1(2t)$, $f_3(t) = f_1(t-3)$, $f_4(t) = f_1(2t-3)$, $f_5(t) = e^{5jt} f_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{f_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{f_2}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

Esercizio

Siano $f_1(t) = e^{-|t|}$, $f_2(t) = f_1(2t)$, $f_3(t) = f_1(t-3)$, $f_4(t) = f_1(2t-3)$, $f_5(t) = e^{5jt} f_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{f_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{f_2}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{f_3}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[f_1(t)](\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Esercizio

Siano $f_1(t) = e^{-|t|}$, $f_2(t) = f_1(2t)$, $f_3(t) = f_1(t-3)$, $f_4(t) = f_1(2t-3)$, $f_5(t) = e^{5jt} f_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{f_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{f_2}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{f_3}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[f_1(t)]\,(\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{f_4}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(2t-3))](\omega) = \mathcal{F}[f_1(2(t-3/2))](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t-3/2)]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Esercizio

Siano $f_1(t) = e^{-|t|}$, $f_2(t) = f_1(2t)$, $f_3(t) = f_1(t-3)$, $f_4(t) = f_1(2t-3)$, $f_5(t) = e^{5jt} f_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{f_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{f_2}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{f_3}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[f_1(t)](\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{f_4}(\omega) = \mathcal{F}[f_1(2t-3))](\omega) = \mathcal{F}[f_1(2(t-3/2))](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t-3/2)]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{1}{2}\mathcal{F}[f_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

Trasformata della convoluzione

Definizione di convoluzione di due funzioni

Siano f_1, f_2 due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ definiamo

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t - \xi)\, d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Definizione di convoluzione di due funzioni

Siano f_1, f_2 due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ definiamo

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi$$

Proprietà

- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (p. commutativa)
- $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (p. associativa)
- $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$ (p. distributiva)

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(f_1 * f_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se f_1, f_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(f_1 * f_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se f_1, f_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi) \, d\xi \right| \, dt$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(f_1 * f_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se f_1, f_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi \right| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi) f_2(t-\xi)| \, d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \, |f_2(t-\xi)| \, dt \, d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(f_1 * f_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se f_1, f_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| \; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi \right| \; dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi) f_2(t-\xi)| \; d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \, |f_2(t-\xi)| \; dt \, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t-\xi)| \;\; dt d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(f_1 * f_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se f_1, f_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi) \, d\xi \right| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi) f_2(t-\xi)| \, d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \, |f_2(t-\xi)| \, dt \, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t-\xi)| \, dt d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\tau)| \, d\tau d\xi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \, d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\tau)| \, d\tau \right)$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(f_1 * f_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se f_1, f_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi) \, d\xi \right| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi) f_2(t-\xi)| \, d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \, |f_2(t-\xi)| \, dt \, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t-\xi)| \, dt d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\tau)| \, d\tau d\xi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| \, d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\tau)| \, d\tau \right)$$

$$< +\infty$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+\xi)} f_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+\xi)} f_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-j\omega\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se f_1, f_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_1(\xi) f_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+\xi)} f_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-j\omega\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-j\omega\xi}\, d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f_2(\tau)\, d\tau \right) = \widehat{f_1}(\omega)\widehat{f_2}(\omega)$$

Trasformata Fourier della derivata

Proposizione

Se f è una funzione sommabile e continua su $\mathbb{R}$ con derivata continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = j\omega\mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

(senza dimostrazione)

Derivata della Trasformata

Proposizione

Se $f(t)$, $tf(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{f}(\omega)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{f}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)f(t)](\omega)$$

Derivata della Trasformata

Proposizione

Se $f(t)$, $tf(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{f}(\omega)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{f}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)f(t)](\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$f'(t) = -2tf(t)$$

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tf(t)](\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$f'(t) = -2tf(t)$$

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tf(t)](\omega)$$

$$j\omega\widehat{f}(\omega) = -2j\widehat{f}'(\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$f'(t) = -2tf(t)$$

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tf(t)](\omega)$$

$$j\omega\widehat{f}(\omega) = -2j\widehat{f}'(\omega)$$

$$\widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $f(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$f'(t) = -2tf(t)$$

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tf(t)](\omega)$$

$$j\omega\widehat{f}(\omega) = -2j\widehat{f}'(\omega)$$

$$\widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega)$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega) \\ \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{f'}(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega) \\ \\ \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega) \\ \\ \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{f}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{f}'(\omega)}{\widehat{f}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega) \\ \\ \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{f}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{f}'(\omega)}{\widehat{f}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Integrando si ha

$$\ln(|\widehat{f}(\omega)|) = -\frac{\omega^2}{4} + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega) \\ \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{f}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{f}'(\omega)}{\widehat{f}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Integrando si ha

$$\ln(|\widehat{f}(\omega)|) = -\frac{\omega^2}{4} + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$|\widehat{f}(\omega)| = k_2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad k_2 > 0$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{f}(\omega) \\ \\ \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{f}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{f}'(\omega)}{\widehat{f}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Integrando si ha

$$\ln(|\widehat{f}(\omega)|) = -\frac{\omega^2}{4} + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$|\widehat{f}(\omega)| = k_2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad k_2 > 0$$

$$\widehat{f}(\omega) = k_2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad k_2 \neq 0$$

Ricordando che $\widehat{f}(0) = \sqrt{\pi}$ si ha

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

È ancora una gaussiana!

Ulteriore trasfomata notevole

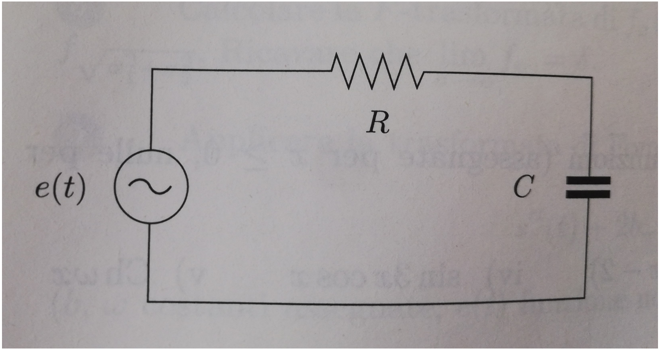
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Ulteriore trasfomata notevole

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

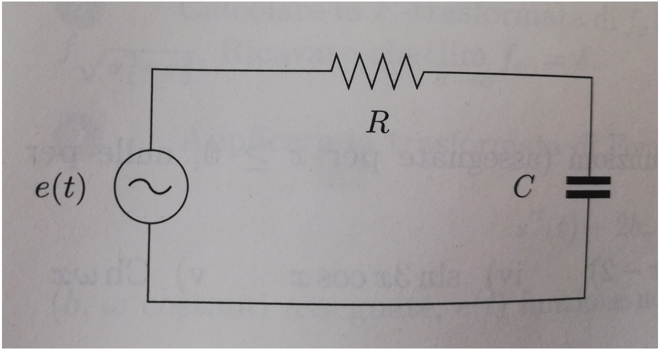
Esercizio: provare che $\frac{1}{1+t^2}$ è sommabile.

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)



Il circuito RC mostrato in figura è composto da una resistenza e da un condensatore carico di capacità C. Nel nostro caso è presente una sorgente esterna di tensione $e(t)$.

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)



Il circuito RC mostrato in figura è composto da una resistenza e da un condensatore carico di capacità C. Nel nostro caso è presente una sorgente esterna di tensione $e(t)$.

Sia $s(t)$ la tensione alle facce opposte del condensatore. Essa verifica la seguente equazione differenziale

$$RCs'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{(equazione di Kirchhoff).}$$

Infatti $e(t) = R\, i(t) + s(t)$ con l'intensità di corrente $i(t)$ data da $i(t) = C\, s'(t)$.

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

$$RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier (come funzione della frequanza ν) ad entrambi i membri

$$RC\, \mathcal{F}[s'(t)](\nu) + \mathcal{F}[s(t)](\nu) = \mathcal{F}[e(t)](\nu)$$

$$RC\, 2\pi j\nu\, \widehat{s}(\nu) + \widehat{s}(\nu) = \widehat{e}(\nu)$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

$$RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier (come funzione della frequanza ν) ad entrambi i membri

$$RC\, \mathcal{F}[s'(t)](\nu) + \mathcal{F}[s(t)](\nu) = \mathcal{F}[e(t)](\nu)$$

$$RC\, 2\pi j\nu\, \widehat{s}(\nu) + \widehat{s}(\nu) = \widehat{e}(\nu)$$

Si ricava che

$$\widehat{s}(\nu) = \frac{\widehat{e}(\nu)}{1 + RC2\pi j\nu} := \widehat{e}(\nu)\widehat{h}(\nu)$$

dove $\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{1+RC2\pi j\nu}$ è detta funzione di trasferimento del circuito e permette di ottenere $s(t)$ dalla conoscenza di $e(t)$.

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

$$RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier (come funzione della frequanza ν) ad entrambi i membri

$$RC\, \mathcal{F}[s'(t)](\nu) + \mathcal{F}[s(t)](\nu) = \mathcal{F}[e(t)](\nu)$$

$$RC\, 2\pi j\nu\, \widehat{s}(\nu) + \widehat{s}(\nu) = \widehat{e}(\nu)$$

Si ricava che

$$\widehat{s}(\nu) = \frac{\widehat{e}(\nu)}{1 + RC2\pi j\nu} := \widehat{e}(\nu)\widehat{h}(\nu)$$

dove $\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{1+RC2\pi j\nu}$ è detta funzione di trasferimento del circuito e permette di ottenere $s(t)$ dalla conoscenza di $e(t)$.

Dalla formula sulla trasformata della convoluzione segue che

$$s(t) = (h * e)(t)$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

Nel nostro caso

$$\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\frac{1}{RC}2\pi j\nu}$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

Nel nostro caso

$$\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} 2\pi j \nu}$$

Osservando che se $a > 0$ e $g(t) = e^{-at}$ per $t > 0$ e $g(t) = 0$ per $t < 0$, allora $\mathcal{F}[g(t)](\nu) = \frac{1}{a+2j\pi\nu}$ (fare il conto usando la definizione), si ha che

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Ne segue che

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau) \frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} \, d\tau.$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau)\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau =^{t-\tau=\sigma} \int_0^{+\infty} e(\sigma)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\sigma}{RC}}\,d\sigma$$

Se $e(t) = 1$ se $0 < t < T$ e zero altrove, allora

- per $t \leq T$ si ha

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^t A\frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma = A\int_0^t \frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma$$

$$= A\left[e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\right]_0^t = A(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau)\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau \overset{t-\tau=\sigma}{=} \int_0^{+\infty} e(\sigma)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\sigma}{RC}}\,d\sigma$$

Se $e(t) = 1$ se $0 < t < T$ e zero altrove, allora

- per $t \leq T$ si ha

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^t A\frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma = A\int_0^t \frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma$$

$$= A\left[e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\right]_0^t = A(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

- per $t \geq T$ si ha

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^T A\frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma = A\int_0^T \frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma$$

$$= A\left[e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\right]_0^T = A(e^{\frac{T-t}{RC}} - e^{\frac{-t}{RC}}) = Ae^{\frac{-t}{RC}}(e^{\frac{T}{RC}} - 1)$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

Riassumendo, se

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$s(t) = \begin{cases} A(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) & \text{se } t \leq T \\ Ae^{\frac{-t}{RC}}(e^{\frac{T}{RC}} - 1) & \text{se } t \geq T \end{cases}$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione (facoltativo)

Riassumendo, se

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$s(t) = \begin{cases} A(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) & \text{se } t \leq T \\ Ae^{\frac{-t}{RC}}(e^{\frac{T}{RC}} - 1) & \text{se } t \geq T \end{cases}$$

Abbiamo usato

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau)\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau \overset{t-\tau=\sigma}{=} \int_0^{+\infty} e(\sigma)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\sigma}{RC}}\,d\sigma$$

Funzioni a decrescenza rapida

Le funzioni a decrescenza rapida sono delle funzioni regolari tali che le funzioni stesse e le derivate decrescono più velocemente di una qualsiasi potenza.
Tale insieme è indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ed è caratterizzato dall'importante fatto che su di esso la trasformata di Fourier è un automorfismo e grazie a questa proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate (Esame di Metodi).

Funzioni a decrescenza rapida

Le funzioni a decrescenza rapida sono delle funzioni regolari tali che le funzioni stesse e le derivate decrescono più velocemente di una qualsiasi potenza.
Tale insieme è indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ed è caratterizzato dall'importante fatto che su di esso la trasformata di Fourier è un automorfismo e grazie a questa proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate (Esame di Metodi).

Abbiamo visto che tanto più veloce $f(t)$ tende a zero per $|t| \to \infty$ tanto più è regolare $\widehat{f}(\omega)$, quindi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è un buon candidato affinchè la trasformata di Fourier sia un automorfismo.

Funzioni a decrescenza rapida: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t|^\alpha |D^\beta f(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Funzioni a decrescenza rapida: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t|^\alpha |D^\beta f(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $f(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$ è a decrescenza rapida.

Funzioni a decrescenza rapida: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^{∞} si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t|^{\alpha}|D^{\beta}f(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $f(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$ è a decrescenza rapida.

Esercizio: provare l'affermazione precedente.

Funzioni a decrescenza rapida: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t|^\alpha |D^\beta f(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $f(t) = e^{-at^2}$ $\quad a > 0$ è a decrescenza rapida.

Esercizio: provare l'affermazione precedente.

Risoluzione esercizio: Facendo le derivate d'ordine n di e^{-at^2}, ci si convince che è sufficiente provare che $t^\gamma f(t)$ con $\gamma \geq 0$ è limitata $\forall t \in \mathbb{R}$.
Osservando che $\lim_{|t| \to +\infty} |t|^\gamma f(t) = 0$ segue che

$$|t|^\gamma |f(t)| < costante \quad \text{per } |t| > M$$

per un certo $M > 0$. Per $|t| \leq M$ le funzioni t^γ e $f(t)$ sono limitate e quindi

$$|t|^\gamma |f(t)| < costante \quad \text{per } |t| \leq M$$

Funzioni a decrescenza rapida: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t|^\alpha |D^\beta f(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proprietà: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f(t)$ sommabile su $\mathbb{R}$ e quindi è trasformabile.

Funzioni a decrescenza rapida: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t|^\alpha |D^\beta f(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proprietà: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f(t)$ sommabile su $\mathbb{R}$ e quindi è trasformabile.

Per dimostare la sommabilitá basta osservare che la funzione è continua e si ha

$$|t|^2 |f(t)| \leq C_{2,0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui segue che

$$|f(t)| \leq \frac{C_{2,0}}{|t|^2} \quad |t| > M$$

con $M > 0$. Per il teorema dei Carbinieri $\lim_{|t| \to +\infty} f(t) = 0$. Tale funzione è infinitesima con ordine almeno 2 (segue dalla stima) e quindi è sommabile.

Funzioni a decrescenza rapida

Proposizione

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{F} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Inoltre $\mathcal{F}$ è un automorfismo (applicazione lineare biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Testi consigliati:

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa - Analisi matematica 2 - Zanichelli
- G.C. Barozzi - Matematica per l‘Ingegneria dell‘Informazione - Zanichelli

Si possono inoltre consultare:

- M. Codegone - Metodi Matematici per l’Ingegneria - Zanichelli
- S. Abenda, S. Matarasso - Metodi Matematici - Progetto Leonardo