Integrazione multipla

(1) Calcolare l'area della superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = v^2 \end{cases}$$

con $(u, v) \in T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le v \le 2, \ 0 \le u \le \frac{1}{v}\right\}$.

(2) Calcolare l'area della porzione di superficie di equazione $z = 1 + x^2 + y$ che si proietta nella regione $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ y \le x^3\}$. $y > 0$

(3) Calcolare l'area della superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \sin t \cos t \\ z(t) = 4 \sin t. \end{cases}$$

con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(4) Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS$$

dove Σ è la porzione di superficie di equazione $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ che si proietta nel semicerchio $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 \le 1\}$.

(5) Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dS$$

dove Σ è la porzione di superficie di equazione $z = xy$ che si proietta nel dominio $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 0, \ x^2 + y^2 \ge 1, \ x^2 + y^2 - 2y \le 0\}$.

(6) Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{z^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dS$$

dove Σ è la porzione di superficie di equazione parametriche

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = v - u \\ z = \sin u \end{cases}$$

con $(u, v) \in T$, dove T è il trangolo del piano u, v di vertici $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π).

(7) Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (x,\, y,\, 0),$$

attraverso la porzione di superficie di equazione $z = xy$ che si proietta nel dominio $T = \big\{(x, y) : y \geq x, x^2 + y^2 \leq 2\big\}$, orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva.

(8) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = (0, \sqrt{z}, e^x)$ uscente dalla porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel triangolo T di vertici $(0, 0,\ (1, 0),\ (1, 2)$.

(9) i) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = (z, 0, x^2)$ uscente dalla porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
ii) Calcolare il flusso dello stesso campo uscente dalla superficie sferica centrata nell'origine e di raggio 1.