Campi vettoriali, forme differenziali lineari

(1) Calcolare l'integrale curvilineo del campo

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$$

lungo l'arco di curva di equazione $y = \log x$, $x \in [1, e]$.

(2) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = -ydx + xdy$$

lungo la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos t(1 + \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

orientata nel verso indotto dalla rappresentazione parametrica.

(3) Calcolare il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = \sqrt{z}\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t^2)$, $t \in [0, \pi/2]$.

(4) Dato il campo

$$\mathbf{F} = 4x(1 + \sqrt{y})\,\mathbf{i} + \frac{x^2}{\sqrt{y}}\,\mathbf{j}$$

stabilire se è conservativo ed, in tal caso, calcolarne un potenziale. Calcolare il lavoro del campo lungo l'arco di circonferenza $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq |x|,\ x^2 + y^2 = 1\}$, orientato in senso antiorario.

(5) Studiare la seguente forma differenziale

$$\omega = -e^{y^2}\frac{y}{x^2}dx + e^{y^2}\frac{(1 + 2y^2)}{x}dy$$

e calcolarne, se possibile, la primitiva che si annulla in $A = (1, 0)$.

(6) Studiare il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},\ y - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}}\right)$$

e calcolarne, se possibile, un potenziale.

(7) Studiare la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{1}{x} + x\sqrt{\frac{y}{1+x^2}}\right) dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{y}} dy.$$

Calcolarne l'integrale curvilineo lungo l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, $x \in [1, 2]$, orientato nel verso crescente delle x.

(8) Utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare l'area della regione delimitata dalla curva piana $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove γ_1 è l'arco di ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ contenuto nel I quadrante, γ_2 è l'arco di circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ contenuto nel I quadrante, γ_3 è il segmento di estremi $A(0, 1)$ e $B(0, 2)$.