Lezioni del 03/10/23 e del 05/10/23

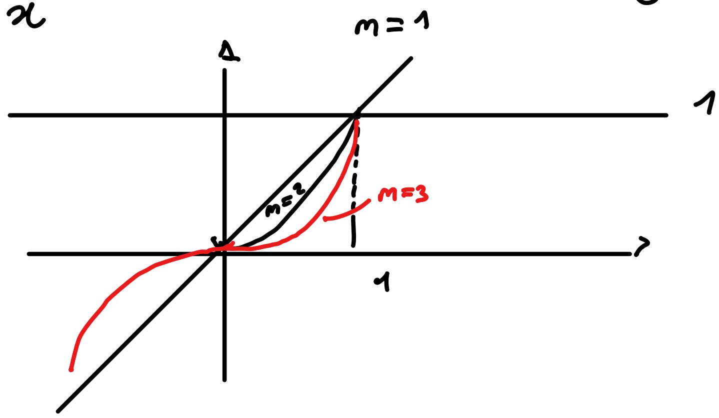
Informatica

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

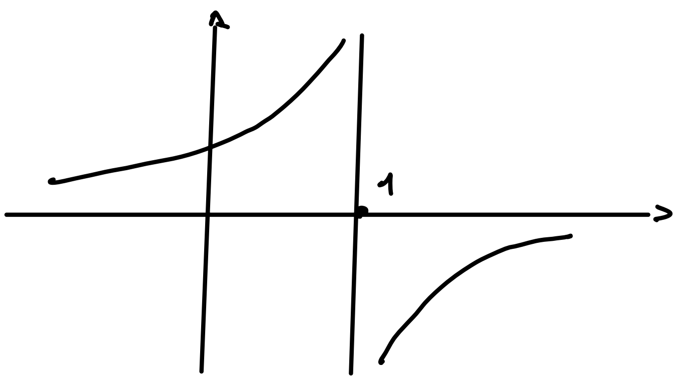
serie geometrica di ragione x

$$f_n(x) = x^n$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x) \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$\forall x \in \,]-1,1[$$



$x \to 1^-$

$x \to 1^+$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin(nx)}_{f_n(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\overbrace{\frac{\log n\,(x^2-1)}{x^n}}^{f_n(x)} \right]$$

<u>Def</u> Una serie di funzioni è una serie del tipo

$$\odot \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f_n = f_n(x)$$

$S_1 = f_1$

$S_2 = f_1 + f_2$

$\vdots$

$S_n = f_1 + \dots + f_n$

$\dots$

$\{S_n\}$ serie di funzioni di termine generale f_n

<u>Def</u>. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in I se $\forall x \in I$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{converge}$$

In tal caso, scriveremo

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

si dice somma della serie

<u>Def</u> Diremo che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge assolutamente in I se $\forall x \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è convergente

OSS. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge assolutamente in I

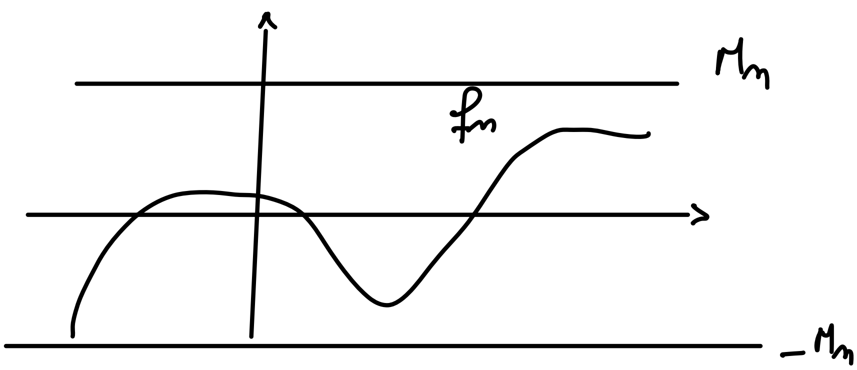
$\not\Uparrow \quad \Downarrow$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ puntualmente in I

Def $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I se

$\exists \{M_n\}$, $M_n \geq 0$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

e $\quad \underbrace{|f_n(x)|}$ $\leq M_n \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$

$$-M_n \leq f_n(x) \leq M_n$$



OSS. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è totalmente convergente, allora

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è convergente $\forall x \in I$ (criterio del confronto)

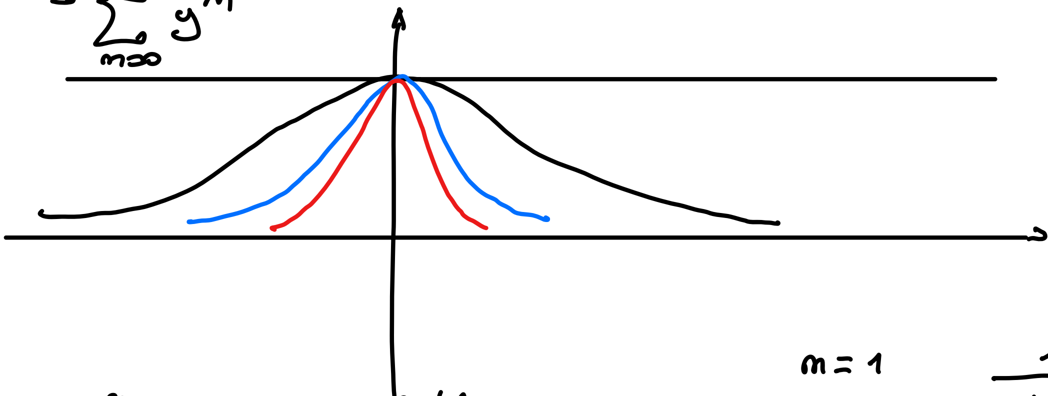
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è assolutamente convergente

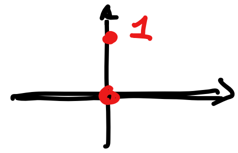
$\Rightarrow$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ puntualmente convergente

$y = \frac{1}{1+x^2}$

ES $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} y^n$





$n=1$ $\qquad \frac{1}{1+x^2}$

$(1+x^2)^n < (1+x^2)^{n+1}$

$\underline{x=0}$ $\qquad f_n(x) = f_n(0) = 1$

$x \neq 0$ $\qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ converge per $|y| < 1$

$$= \frac{1}{1-y}$$

Quindi la serie originale converge puntualmente quando

$$\frac{1}{1+x^2} = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = |y| < 1 \iff 1+x^2 > 1$$

$$\iff x^2 > 0$$

$$\iff \underline{\underline{x \neq 0}}$$

$x \neq 0$

La serie converge per $x \neq 0$ a $\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2}$

$x = 0 \to \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2}{x^2} \quad \forall x \neq 0$$

Se vi fosse convergenza totale, dalla definizione si avrebbe

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = |f_n(x)| \leq M_n \quad , \quad \sum_{n \geq 1}^{\infty} M_n < +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$S \setminus T$

"differenza"

$1 \leq M_n$ impossibile perché $\lim_{n \to \infty} M_n = 0$ (la serie converge!!)

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + \underbrace{a_n (x-x_0)^n}_{f_n(x)} + \dots$$

$a_n \in \mathbb{R}$

serie di potenze di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$

ES. $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n \qquad a_n = 1 \qquad x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin n \left(x + \frac{1}{2}\right)^n \qquad a_n = \sin n$$

$(x - (-\frac{1}{2}))$ $\qquad x_0 = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{\log n} \qquad a_n = \frac{n!}{\log n} \qquad x_0 = 0$$

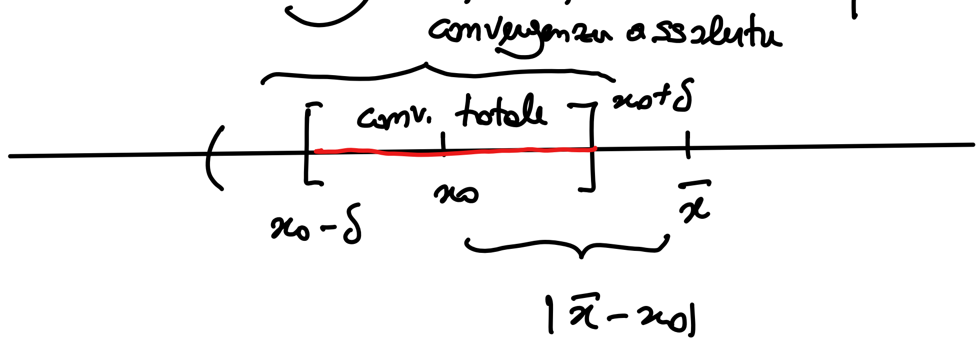
$$\underbrace{\frac{n!}{\log n}}_{= a_n} \cdot x^n \qquad\qquad 0^0 = 1$$

OSS. Per $x = x_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 \in \mathbb{R}$

LEMMA

Lemma (Caratterizzazione dell'insieme di convergenza di una serie di potenze)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge per ipotesi in $\bar{x} \neq x_0$.



Allora la serie converge assolutamente per ogni x tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$. Inoltre, per ogni $\delta > 0$ tale che $\delta < |\bar{x}-x_0|$, la serie converge totalmente in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

Dim.- Conv. assoluta $\quad |x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$

dobbiamo dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x-x_0|^n < \infty$

Poiché per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(\bar{x}-x_0)^n}$ converge, allora

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \, \underbrace{|\bar{x}-x_0|^n} = 0$$

$\Rightarrow \quad \exists\, M>0$ tale che $|a_n| \, |\bar{x}-x_0|^n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \, |x-x_0|^n = |a_n| \, |\bar{x}-x_0|^n \underbrace{\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n}_{h_x} \leq M \, h_x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} h_x^n < \infty$$

$h_x = \dfrac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|} < 1$ perché $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$

$\Rightarrow$ dal criterio del confronto, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x-x_0|^n < \infty$

$$|a_n| \, |x-x_0|^n = |a_n| \, |\bar{x}-x_0|^n \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n \leq M \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n \leq$$

Per ipotesi, supponiamo che $|x-x_0| \leq \delta \iff x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

$$\delta < |\bar{x}-x_0|$$

$(*) \leq M \underbrace{\left(\frac{\delta}{|\bar{x}-x_0|}\right)}_{h}^{n}$ $\qquad h = \frac{\delta}{|\bar{x}-x_0|} < 1$

<u>Quindi</u>: $|a_n| \, |x-x_0|^n \leq M h^n \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

dove $\sum_{n=0}^{\infty} M h^n < \infty$

$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \sum_n M_n < \infty$

$\forall x, \forall n$

e la serie converge totalmente in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

<u>Teorema</u> (Intervallo di convergenza)

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora si può

verificare una delle seguenti eventualità:

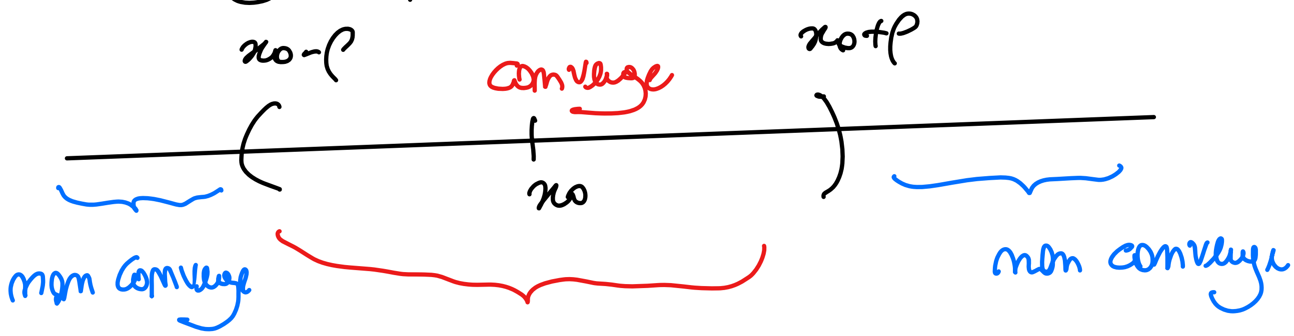
i) la (1) converge solo per $x = x_0$;

ii) " " " per ogni $x \in \mathbb{R}$;

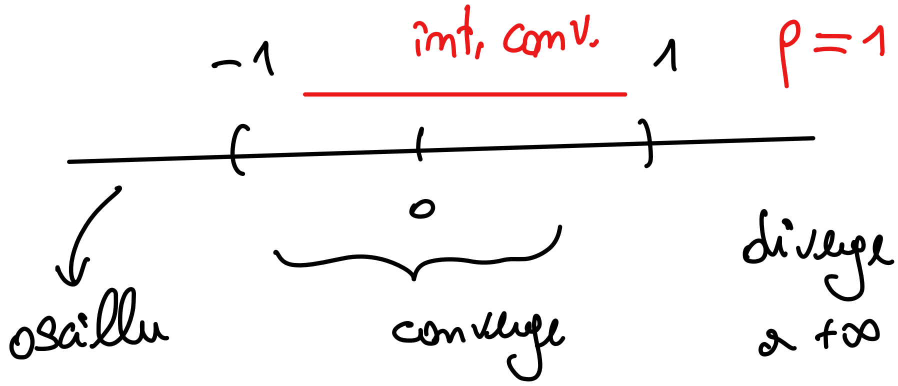
iii) esiste un numero $\rho = (\text{"rho"}) > 0$

tale che la (1) converge in $]x_0-\rho, x_0+\rho[$

non converge per $|x-x_0|>\rho$



ES. $\sum x^n$

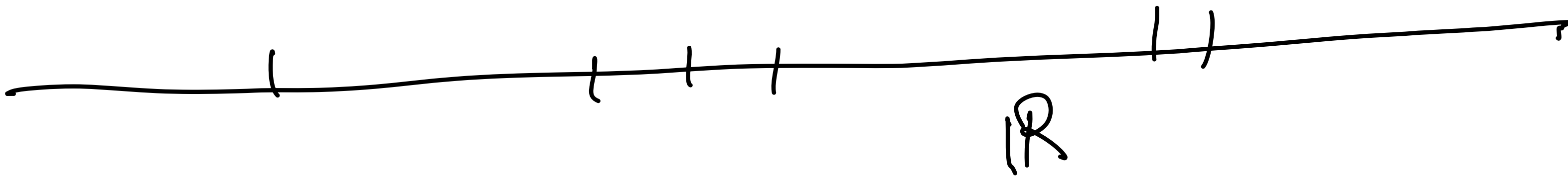


OSS. Per $x = x_0 \pm \rho$ nulla si può dire in generale!!

ρ = raggio di convergenza della (1)

$]x_0-\rho, x_0+\rho[$ = intervallo di convergenza in (i) avremo $\rho = 0$ $\quad\quad$ $\rho \in [0,+\infty]$??

(ii) " $\rho = +\infty$



Criterio della radice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{} (x-x_0)^n \qquad (a_n<0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \qquad \cdot \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)(x-2)^n$$

Allora: $$\rho = \frac{1}{l} = \begin{cases} 1/l & \text{se } 0<l<+\infty \\ +\infty & \text{se } l=0 \\ 0 & \text{se } l=+\infty \end{cases}$$

ES $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n!}}_{\downarrow \, +\infty}} = 0 = \ell$$

$$\rho = 1/\ell = +\infty$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! \, \underset{(x-0)^n}{x^n}$: $\rho = 0 \implies$ la serie converge solo per $x = 0$.

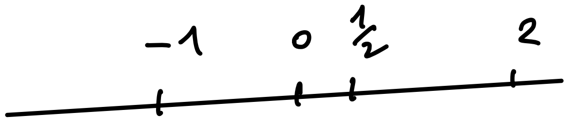
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{3^n+1}$$

$$a_n = \frac{2^n}{3^n+1} \qquad x_0 = 1/2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\sqrt[n]{3^n+1}}_{\sim 3^n}} = \frac{2}{3} = \ell$$

$$\rho = \frac{3}{2} \quad \left(= 1/\ell\right)$$

Int. conv. $(x_0-\rho, x_0+\rho) = \left]\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right[$



$= \left]-1, 2\right[$

conv. assoluta

NOTA In $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ conv. assoluta!!!