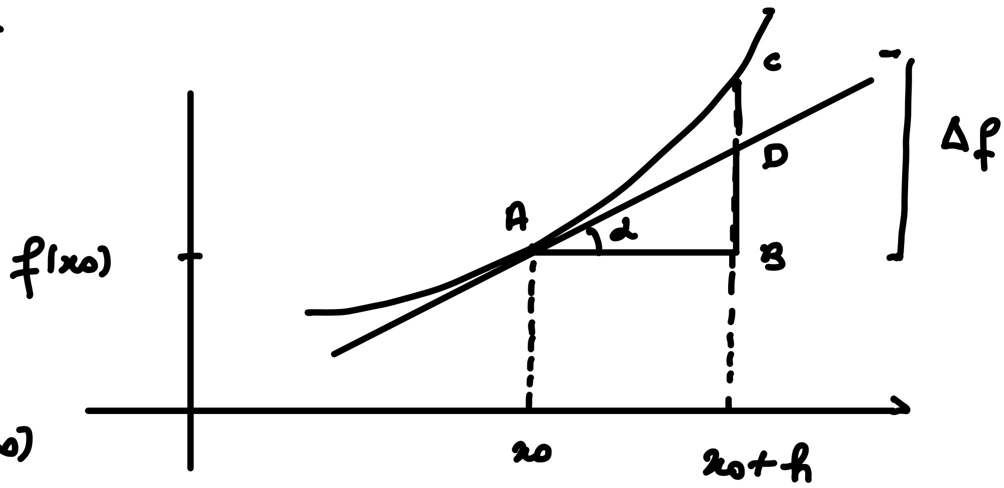
Lezione del 26/10/23

DIFFERENZIABILITÀ

$f = f(x)$ derivabile



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = \overline{CD} + \overline{BD} = f'(x_0)h + \overline{CD}$$

$$\overline{BD} = h \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)h$$

$$\overline{CD} = o(h)$$

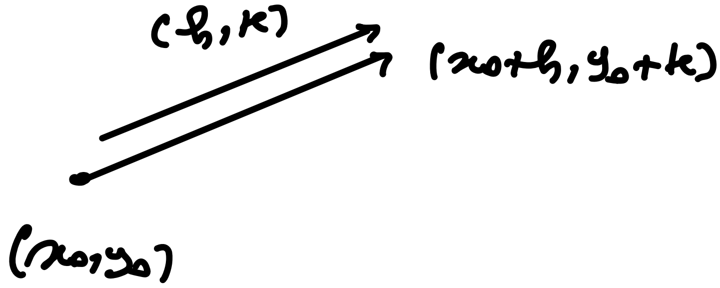
$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$$

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

differenziale di f in x_0

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\underbrace{dx}_{?}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} = 0$$



$\nabla f(x_0,y_0)$

$df(x_0,y_0)(h,k)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (1)$$

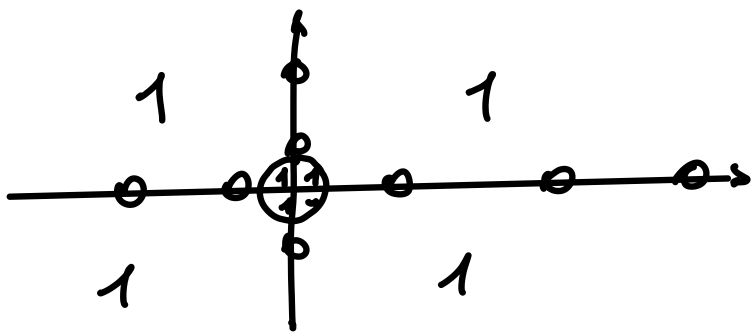
Def. Si dice che f è differenziabile in (x_0,y_0) se f è derivabile in (x_0,y_0) e vale la relazione (1).

OSS. f è differenziabile $\Longrightarrow$ f è derivabile

$\not\Longleftarrow$

Prop. Se f è differenziabile in (x_0,y_0) allora f è continua in (x_0,y_0).

ES.
$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{se } xy\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ opp. } y=0 \end{cases}$$



f non è continua in $(0,0)$ $\Longrightarrow$ f non è differenziabile

$(0,0)$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = f_x(0,0)$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 = f_y(0,0)$$

f è derivabile in $(0,0)$

OSS. Se f è derivabile $\not\Rightarrow$ f è continua

Def. f è differenziabile in (x_0,y_0)

$$df(x_0,y_0)(h,k) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k)$$

dicesi differenziale di f in (x_0,y_0).

$$df(x_0,y_0)(h,k) = f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k$$

$$df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$

f è differenziabile in (x_0,y_0) $\Leftrightarrow$

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$
$$(h,k)\to(0,0)$$

$h = x - x_0, \quad k = y - y_0$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

equazione del piano tangente ad $f(x,y)$
in (x_0, y_0).

ES. Equazione piano tangente al grafico di

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+2y) \quad \text{in} \quad (x_0, y_0) = (1,0)$$

$$f(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{1}}, \underset{\overset{\shortparallel}{y}}{0}) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$$

$$f_x = \frac{1}{1+(x+2y)^2} \qquad f_x(1,0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f_y = \frac{1}{1+(x+2y)^2} \cdot 2 \; ; \; f_y(1,0) = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + 1 \cdot y$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + y$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 0).$$

<u>Teorema del differenziale</u> $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in A. Allora, se $f_x, f_y : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sono <u>continue</u> in A, f è differenziabile in A.

funzioni continue

$$f \in C^1(A) \Rightarrow f \text{ diff. in } A \Rightarrow f \in C^0(A)$$

$$f \in C^2(A) \Rightarrow f_x, f_y \text{ continue in } A \Rightarrow f \in C^1(A)$$
$$\Rightarrow f \in C^0(A)$$

SERIE NUMERICHE

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+\sin n}{n^3-n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} n) \sin\frac{1}{n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\sin\frac{1}{n}\right)$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{n!}{(2n)^{n+1}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+2}}{n+2}$