Lezione del 29/11/2023

(1) $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$

(2) $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

(2) Equazione omogenea associata alla (1).

y_1, y_2 integrali linearmente indipendenti di (2)

$\Rightarrow$ l'int. generale di (2) è

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Se per la (1) abbiamo un integrale particolare $\bar{y}(x)$

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

è soluzione di (1), per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(INTEGRALE GENERALE DI (1))

Teorema NELLE CONDIZIONI DI CUI SOPRA,

l'integrale generale della (1) è dato da

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y'' + a y' + b y = f(x)$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$y'' + y' = e^{x}$$

$$= x^2$$

$$= (x+1) e^{-x}$$

EQ. OM. ASSOCIATA : $y'' + y' = 0$

EQ. CARATT. : $\lambda^2 + \lambda = 0$ $\Delta > 0$

$\lambda = -1, \ \lambda = 0$

$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{0 \cdot x} = 1$

$\longrightarrow$ int. generale : $y = c_1 e^{-x} + c_2$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y'' + y' = e^{x}$$

$\bar{y}(x)$ int. particolare ?? $\longleftarrow$

Integrale particolare quando

$$f(x) = e^{\bar{\lambda} x} p(x)$$

$$e^{x} = e^{1 \cdot x} \cdot 1$$

$\bar{\lambda} = 1, \quad p(x) = 1$

$x^2 e^{-x}$ $\quad \bar\lambda = -1, \quad p(x) = x^2$

$$(\underbrace{x^2 - 9x}_{p(x)}) e^{3x} \searrow \bar\lambda \qquad \bar\lambda \swarrow$$

$$f(x) = 1 = \underset{\searrow p(x)}{1} \cdot e^{0 \cdot x}$$

a) Eq. caratt. $\quad \varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$\bar\lambda$ non è radice di $\varphi(\lambda) = 0$, ossia

$$\varphi(\bar\lambda) \neq 0$$

$$y'' + y' = e^{x} = 1 \cdot e^{1 \cdot x}$$

$0, -1 \qquad p(x) \quad \bar\lambda = 1$

$\bar\lambda$ NON <u>È</u> RADICE DELL'EQ. CAR.

<u>Allora</u> un integrale particolare dell'equazione <u>completa</u> è dato da

$$\bar{y}(x) = e^{\bar{\lambda} x} q(x)$$

$q(x)$ = polinomio dello stesso grado di $p(x)$ da determinarsi.

$$y'' + y' = e^x \qquad \bar{\lambda} = 1, \; p(x) = 1$$

$$\bar{y}(x) = e^x \cdot a = a e^x \quad , \underline{\underline{a \in \mathbb{R}}}?$$

$$\bar{y}'(x) = a e^x$$

$$\bar{y}''(x) = a e^x$$

$$2a \cancel{e^x} = \cancel{e^x}$$

$$2a = 1 \iff a = 1/2$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2} e^x \quad \text{INTEGR. PARTICOLARE}$$

INT. GENERALE COMPLETA:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{x}$$

$$y'' + y' = x e^{1 \cdot x} \qquad \bar{\lambda} = 1$$

$$p(x) = x$$

$$\bar{y}(x) = (ax+b)e^{x}$$

?

$$\bar{y}' = a e^{x} + (ax+b)e^{x}$$

$$\bar{y}'' = a e^{x} + (ax+b)e^{x} + a e^{x}$$

$$= 2a e^{x} + (ax+b)e^{x}$$

$$2a e^{x} + (ax+b)e^{x} + a e^{x} +$$

$$+ (ax+b)e^{x} = x e^{x}$$

$$3a \cancel{e^{x}} + 2(ax+b)\cancel{e^{x}} = x \cancel{e^{x}}$$

$$3a + 2ax + 2b = x$$

$$2ax + (\underbrace{3a + 2b}) = x + 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ 2b = -3a = -3/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad //$$

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{x}$$ INT. PART. COMPLETA!

INT. GENERALE:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{x}$$

$$x^2 e^{x}$$

$$(ax^2 + bx + c)e^{x} \ldots$$

b) $\bar{\lambda}$ è radice della caratteristica:

$$P(\bar{\lambda}) = 0$$

Allora un integrale particolare dell'equazione

completa è
$$\bar{y}(x) = x^h q(x) e^{\bar{\lambda} x}$$

h = ordine di molteplicità della radice

$q(x)$ = polinomio dello stesso grado di $p(x)$.

$$y'' + y' = 1 \cdot e^{-x} \qquad p(x) = 1$$

$\bar{\lambda} = -1$ É RADICE SEMPLICE DELLA CARATTERISTICA!

$$\bar{y}(x) = x e^{-x} (\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{a}) =$$

$$= a x e^{-x}$$

$$\bar{y}' = a e^{-x} - a x e^{-x}$$

$$\bar{y}'' = -ae^{-x} - ae^{-x} + axe^{-x}$$

$$= -2ae^{-x} + axe^{-x}$$

$$-2ae^{-x} + \cancel{axe^{-x}} + ae^{-x} - \cancel{axe^{-x}}$$

$$= e^{-x}$$

$$-a\cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}}$$

$$-a = 1 \iff a = -1$$

$$\bar{y}(x) = -xe^{-x} = -xe^{-x}$$

<u>INT. GEN.</u> $y = c_1 + c_2 e^{-x} - xe^{-x}$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

$$f(x) = 1 \cdot e^{\bar{\lambda} x}$$

OM. ASS. $\quad y'' + 2y' + y = 0$

EQ. CAR. $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\underbrace{\lambda^2 + 2\lambda + 1}$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$\lambda = -1$ RADICE DOPPIA!

INT. GEN. OMOGENEA ASSOCIATA

$(\Delta = 0)$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$\bar{\lambda} = -1$ è radice DOPPIA

della caratteristica $(h = 2)$

$$\bar{y}(x) = x^2 e^{-x} \; (a)$$

$$= a x^2 e^{-x}, \quad \underline{a \in \mathbb{R}}$$

??

$$\Downarrow$$

$$\bar{y}'(x) = 2axe^{-x} - ax^2 e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = 2ae^{-x} - 2axe^{-x} - 2axe^{-x} + ax^2 e^{-x}$$

$$= 2ae^{-x} - 4axe^{-x} + ax^2 e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

$$2a e^{-x} - \cancel{4ax e^{-x}} + \cancel{ax^2 e^{-x}} +$$

$$+ \cancel{4ax e^{-x}} - \cancel{2ax^2 e^{-x}} +$$

$$+ \cancel{ax^2 e^{-x}} = e^{-x}$$

$$2a \cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}}$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

INT. GENERALE COMPLETA:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$+ \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

$x = 0$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{c_1 = 0} \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{c_2 = 1}$$

$$0 = y(0) = c_1$$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

$$- c_2 x e^{-x} +$$

$$+ x e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

$$1 = y'(0) = -c_1 + c_2$$

$$y = x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \quad //$$

$$y'' + y = \underbrace{x^2 + e^{2x}}_{f(x)}$$

EQ. OM. $\quad y'' + y = 0$

EQ. CAR. $\quad \lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda = \pm i$$

$(\Delta < 0)$ $\qquad \alpha = 0, \; \beta = 1$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y'' + y = x^2 \leftarrow \bar{y}$$

$$y'' + y = e^{2x} \leftarrow \bar{\bar{y}}$$

$\bar{y} + \bar{\bar{y}}$ è integrale della completa!!

$$y'' + y = 1 + e^{2x}$$

$$\longrightarrow \quad y'' + y = 1$$

$$y'' + y = e^{2x}$$

$\longrightarrow \quad f(x) = 1 \cdot e^{0 \cdot x}$

$\bar{\lambda} = 0, \; p(x) = 1$

Un integrale particolare sarà

$\bar{y}(x) = a e^{0 \cdot x} = a, \; a \in \mathbb{R}$

$\bar{y}' = \bar{y}'' = 0$

$\boxed{a = 1} \qquad \underline{\underline{a = 1}}$

$\bar{y}(x) = 1$ integrale della ⊙

⊙⊙ $\quad y'' + y = e^{2x}$

$f(x) = 1 \cdot e^{2 \cdot x}$

$$\overline{p(x)} \quad \bar{\lambda} = 2$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = a e^{2x}$$

$$\bar{\bar{y}}' = 2a e^{2x}, \quad \bar{\bar{y}}'' = 4a e^{2x}$$

$$4a e^{2x} + a e^{2x} = e^{2x}$$

$$a = 1/5$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{5} e^{2x}$$

Int. partikular: $\bar{y} + \bar{\bar{y}} = 1 + \frac{1}{5} e^{2x}$

Int. gen. : $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1 + \frac{1}{5} e^{2x}$