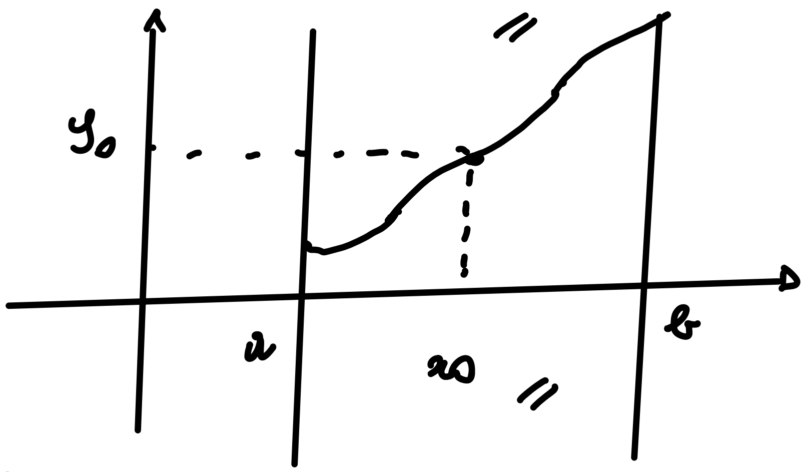
Teorema di esistenza ed unicità globale (o in grande) di Cauchy



$[a,b] \times \mathbb{R}$

$f = f(x,y)$

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

•) f continua ;

••) f Lipschitziana rispetto ad $y \in \mathbb{R}$, uniformemente rispetto ad $x \in [a,b]$:

$$\exists L > 0 \;:\; |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

<u>Allora</u> per ogni $x_0 \in [a,b]$ ed ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una/unica soluzione $y = y(x)$, $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ che risolve in <u>tutto</u> $[a,b]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+x^2}{1+y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$ ← PROVARE A RISOLVERLA

$y(x) = x$: $y' = 1$, $\dfrac{1+x^2}{1+y^2} = \dfrac{1+x^2}{1+x^2} = 1$

SOLUZIONE GLOBALE

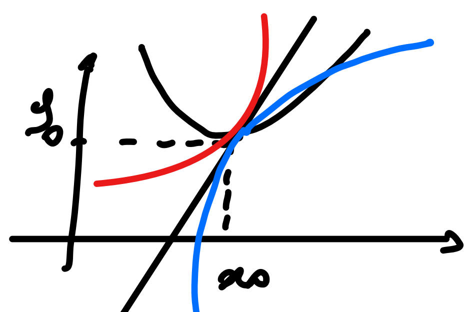
II° ordine in forma normale

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

$f(x, y, z)$

$x_0 \in \mathbb{R}$

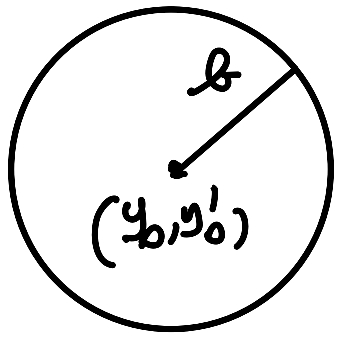
$y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$



__Teorema__ (di esistenza ed unicità locale)

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$(\underbrace{y_0, y_0'}) \in \mathbb{R}^2$



J = intorno circolare di raggio b, centrato in (y_0, y_0')

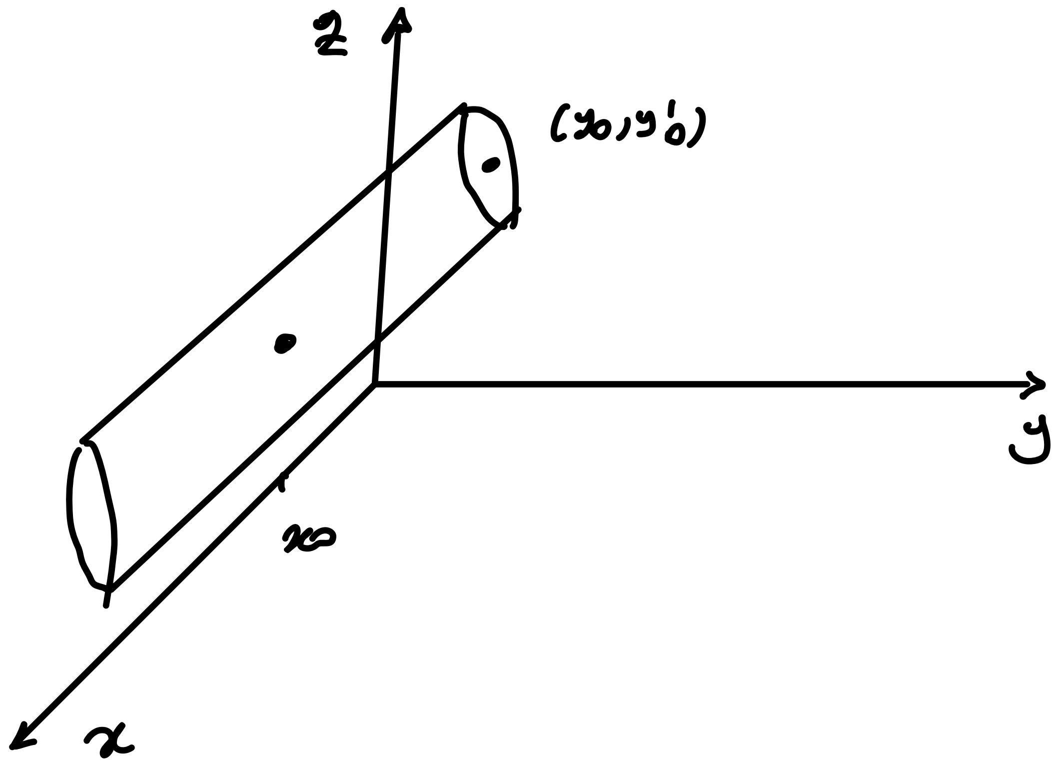
$$= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \| (y,z) - (y_0, y_0') \| \le b \}$$

$$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f = f(\underbrace{x}_{\in I}, \underbrace{y, z}_{\in J})$$

•) f continua in $I \times J$

••) f Lipschitz rispetto a (y,z), UNIFORMEMENTE RISPETTO AD x



$\odot \iff \exists L > 0:$

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq L \, \|(y_1, z_1) - (y_2, z_2)\|$$

$\forall x \in I, \ \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in J$

<u>**TESI**</u>: Esiste $\delta \in (0, a)$ ed

esiste un'unica funzione $y = y(x)$,

$y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ che risolve in tale intervallo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

EQUAZIONI LINEARI DEL II° ORDINE

$$y'' + \underbrace{a(x)}_{\text{COEFFICIENTI}} y' + \underbrace{b(x)} y = \underbrace{f(x)}_{\text{TERMINE NOTO}} \quad (1)$$

funzioni continue in $[a, b]$.

ES. $y'' = \lambda y'$: $y'' - \lambda y' = \underset{\uparrow f}{0}$

$\underline{\omega>0}$ $y'' + \omega^2 y = 0$ (EQ. MOTI ARMONICI)

$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

$y'' + 2y' - y = \log x$

PERCHÉ LINEARE?

$L[y] = y'' + \underbrace{a(x)y' + b(x)y}$

$y \in C^2([a,b])$

$L[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 L[y_1] + \alpha_2 L[y_2]$

$L : C^2([a,b]) \longrightarrow C^0([a,b])$

opp. lineare.

Def. $f(x)=0$

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0 \quad (2)$$

equazione lineare omogenea

Prop. Se y_1, y_2 soluzioni (o integrali) di (1), allora y_1-y_2 soluzione di (2).

Dire che $y(x)$ soluzione di (1) $\iff$

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

$\Leftrightarrow \quad L[y] = f.$

Quindi, se y_1, y_2 sono soluzioni di (1)

$$L[y_1] = f$$
$$L[y_2] = f$$

$$L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = f - f = 0$$

$\Rightarrow y_1 - y_2$ soluzione di (2).

Teorema (esistenza ed unicità globale)

Per ogni $x_0 \in [a,b]$ ed $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale $y = y(x)$, $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

EQUAZIONI OMOGENEE

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \qquad (2)$$

<u>Prop.</u> Se $y_1, \dots, y_n$ sono integrali particolari di (2) allora

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n$$

è ancora un integrale particolare di (2).

<u>Prop.</u> (2) Per ogni $x_0 \in [a,b]$, l'unica soluzione di (2) con condizioni iniziali <u>nulle</u>

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0$$

è la soluzione identicamente nulla: $y \equiv 0$

$y \equiv 0$ soluzione

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Def. L'integrale generale di un'equazione lineare è l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

Def. $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^0([a,b])$

linearmente indipendenti se

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$y_1, \dots, y_n$ linearmente dipendenti se $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$.

DETERMINANTE WRONSKIANO

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

y_1, y_2 integrali particolari di (2)

Si dice determinante Wronskiano di y_1, y_2

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Teorema (del Wronskiano)

Supponiamo che y_1, y_2 integrali particolari di (2).

Allora:

(i) $\exists\, x_0 \in [a,b]$ t.c. $W(x_0) = 0 \iff$ y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti;

(ii) $\exists\, x_1 \in [a,b]$ t.c. $W(x_1) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.

CONSEGUENZA

O si ha che

y_1, y_2 lin. dip. $\longleftrightarrow$ $W(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a,b]$

oppure $W(x) \neq 0$ " "

$\updownarrow$

y_1, y_2 lin. indip.

Integrale generale di un'equazione lineare

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

Prop. Esiste un sistema di due integrali linearmente indipendenti di (2)

y_1, y_2

Dim. - Consideriamo i due integrali y_1, y_2 della ②

verificanti le condizioni iniziali, $\forall x_0 \in [a,b]$,

$$\begin{cases} y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Tali soluzioni esistono e sono uniche per il teorema di esistenza e unicità globale. INOLTRE:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ dal teorema del Wronskiano, y_1 e y_2 linearmente indipendenti.

Teorema (Integrale generale di un'equazione omogenea)

Siano y_1 e y_2 integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (2). Allora l'integrale generale di (2) è dato da

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad , \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

(3) $y'' + a y' + b y = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{y = e^{\lambda x}}$: imponiamo che questa sia un integrale particolare di (3) $\quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} + a \lambda \cancel{e^{\lambda x}} + b \cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P(\lambda) = \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}_{} = 0 \qquad (4)$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

POLINOMIO

CARATTERISTICO

$$\Delta = a^2 - 4b$$

a) $\Delta > 0$: l'equazione (4) ha due radici $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali. $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

integrali particolari di (3)

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \overbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}^{\neq 0} \underset{\neq 0}{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}} \neq 0$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ lin. indipendenti $\Rightarrow$ l'integrale generale di (3) è

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

ES. $y'' + 5y' + 4y = 0$

EQ. CAR. : $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{cases} -4 =: \lambda_1 \\ -1 =: \lambda_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'integrale generale è $\quad \| y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} \|$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $\Delta = 0 \longrightarrow$ l'equazione caratteristica (4)

ha una radice doppia λ

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

$$y_2 = x e^{\lambda x}$$

integrali di (3)

Mostrare che y_1, y_2 lin. indipendenti :

$$W(x) \neq 0$$

$\Rightarrow$ l'integrale generale sarà dato da

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

ES. $y'' + 2y' + y = 0$

EQ. CAR. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad \Delta = 0$

$\lambda = -1$ rad. doppia

$(\lambda + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow$ l'int. generale dell'equazione è

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'' + ay' + by = 0$$

c) $\Delta < 0$ $\qquad y'' + y = 0$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$z = \alpha + i\beta$ $\qquad \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\lambda = \pm i$ $\quad \leftarrow \quad \alpha = 0$, $\beta = 1$

Ci sono due radici complesse coniugate

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

$$\lambda = \alpha - i\beta$$

$$y_1 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$$

FORMULE DI EULERO

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$$

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$$

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ \bar{y}_2 &= \frac{y_2 - y_1}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}\right\} \text{integrali particolari dell'equazione}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1' & \bar{y}_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

L'integrale generale dell'equazione sarà

$$\left[y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \right]$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ES $\quad y'' + \omega^2 y = 0$ $\qquad i^2 = -1$

EQ. CARATTERISTICA: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega^2} =$$

$$= \pm \sqrt{\omega^2 i^2}$$

$$= \pm \omega i$$

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = \omega$$

L'integrale generale è

$$y = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$$

ES $\quad y'' - 10y' + 21y = 0$

EQ. CAR. $\quad \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 21 = 4 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2 \quad : \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 7$$

Int. generale: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{7x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'' - 10y' + 21y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$1 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$y' = 3c_1 e^{3x} + 7c_2 e^{7x}$$

$$0 = y'(0) = 3c_1 + 7c_2$$

$$3\times \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 7c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -\frac{3}{4} \\ c_1 = 1 - c_2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$y = \frac{7}{4} e^{3x} - \frac{3}{4} e^{7x}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \Delta = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda = 2 \text{ radice doppia}$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 20 = -16 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-16} = 2 \pm \sqrt{16 i^2} = 2 \pm 4i$$

$$i^2 = -1$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 4$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos(4x) + C_2 e^{2x} \sin(4x)$$

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$y'' - y' - 2y = 0$$

EQ. CAR. $\quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \Delta = 9 > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad : \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$0 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2 c_2 e^{2x}$$

$$3 = y'(0) = -c_1 + 2c_2$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_2 - c_1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \cancel{3}c_2 = \cancel{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases} : y = -e^{-x} + e^{2x}$$