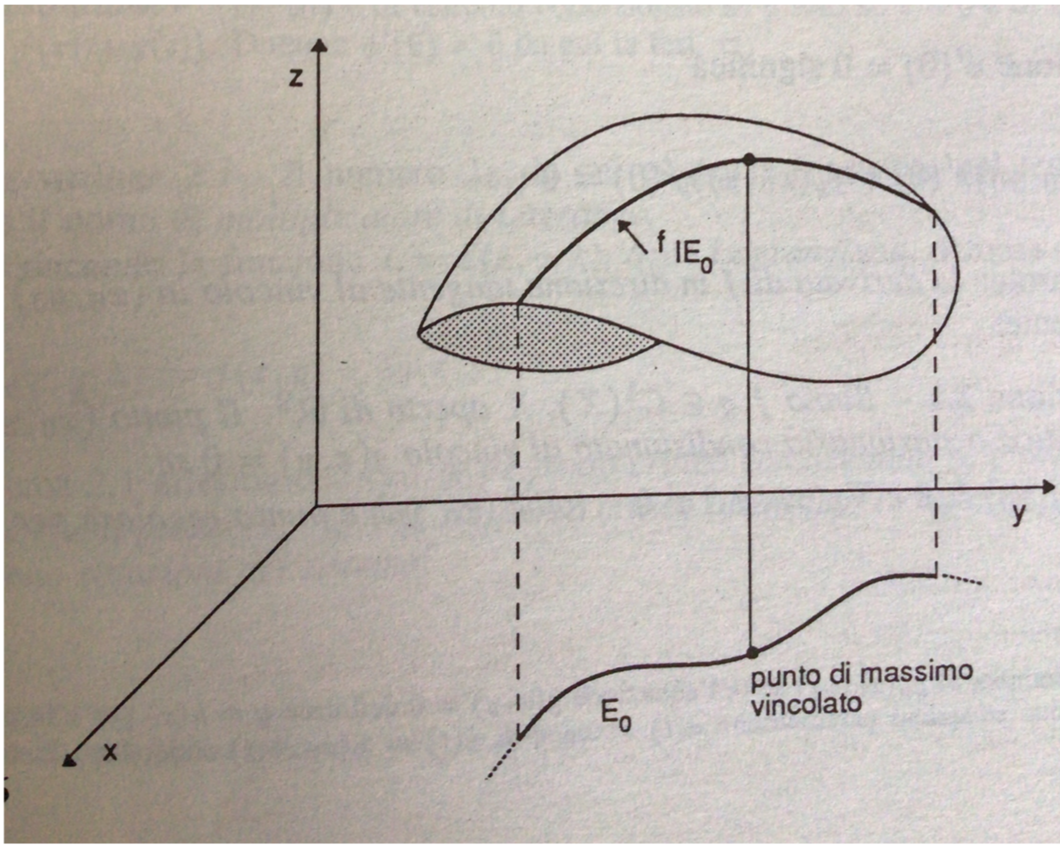
Massimi e minimi vincolati

$f = f(x,y)$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f, g \in C^1(A)$

$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



__Problema__ Determinare gli estremi di $f = f(x,y)$ (funzione obiettivo), ristretta all'insieme

$$E_0 = \{ (x,y) \in A : g(x,y) = 0 \}$$

<u>vincolo</u>

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$E_0 :$ $\quad x^2 + y^2 = 1$ circonferenza

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\phi(t) = f(x(t), y(t)) = f(\cos t, \sin t)$$

$t \in [0, 2\pi]$

calcoliamo minimo e massimo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ estremi vincolati.

In generale non è possibile rappresentare

Teorema (Condizione necessaria per gli estremi vincolati)

Se $(x_0, y_0) \in E_0$ è un estremo relativo di f, vincolato al vincolo

$$g(x,y) = 0$$

(significa che (x_0, y_0) è di massimo o di minimo

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \cap E_0$$

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \quad \text{"} \qquad \text{"} \;)$$

Se (x_0, y_0) è regolare, allora

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

$\lambda \equiv$ moltiplicatore di Lagrange.

Quindi, se E_0 è compatto (e.g. se A è limitato), il minimo ed il massimo di $f(x,y)$ su E_0 vanno cercati tra le soluzioni del sistema

$$1)\quad \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = 0 \quad \longleftarrow \text{ EQUAZIONE DEL VINCOLO} \end{cases}$$

La funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

si chiama $\boxed{\text{Lagrangiana}}$. Cosicché gli estremi assoluti di f, vincolati ad E_0, si cercano tra i punti critici della Lagrangiana $\mathcal{L}$.

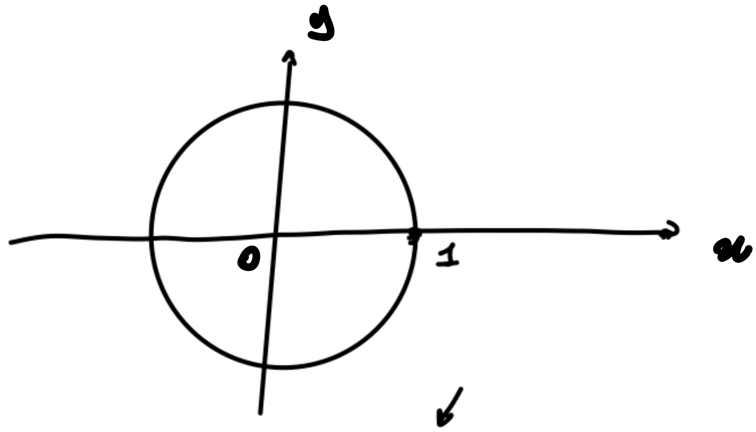
<u>ES.</u> Trovare gli estremi di $f(x,y)=e^{x+y}$

sul vincolo $x^2+y^2=1$

$g(x,y)=x^2+y^2-1 \quad : \quad E_0=\{(x,y): g(x,y)=0\}$

$\nabla g=(2x,2y)=(0,0) \iff (x,y)=(0,0)\notin E_0$

Tutti i punti di E_0 sono regolari



$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = e^{x+y} - \lambda(\underbrace{x^2+y^2}-1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} - 2\lambda x = 0 \\ e^{x+y} - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{x+y} - 2\lambda x = 0 \\ e^{x+y} - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

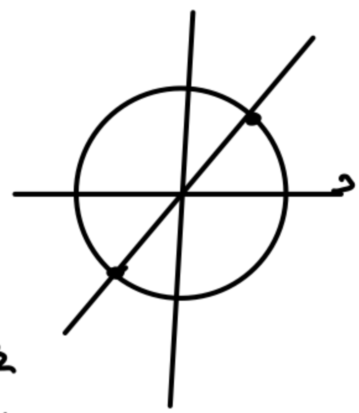
risolvere

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ \cancel{2}\lambda x - \cancel{2}\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ \lambda(x-y) = 0 \\ \underbrace{x^2+y^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ x-y=0 \Leftrightarrow y=x \\ x^2+x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ y = x \\ 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-\sqrt{2}} = \cancel{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\lambda = -\sqrt{2}\,\lambda \end{cases} \qquad \lambda = -\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$



$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\sqrt{2}} < f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}$$

$f(x,y) = e^{x+y}$

A p.to di minimo vincolato

B " di massimo vincolato