# INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

## C.d.S. in Economia e Management

### II Prova Intercorso – 13 dicembre 2023

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

| Domanda n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Risposta | B | A | B | C | B | A | C | C | B | B |

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} 4^{x^2-5x+3}$$

si può affermare che

A) $\lim_{x \to -\infty} 4^{x^2-5x+3} = 0.$

B) $\lim_{x \to -\infty} 4^{x^2-5x+3} = +\infty.$

C) $\lim_{x \to -\infty} 4^{x^2-5x+3} = 1.$

2) Sia $f$ la funzione definita mediante la legge $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$. Si può affermare che

A) $f$ è decrescente e convessa.

B) $f$ è decrescente e concava.

C) $f$ è crescente e concava.

3) Siano $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Se $x_0$ è un punto di flesso si può affermare che

A) esiste la derivata seconda di $f$ in $x_0$ ed essa è nulla.

B) se esiste la derivata seconda di $f$ in $x_0$, allora essa è nulla.

C) esiste la derivata seconda di $f$ in $x_0$.

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = 4x^2 - \frac{6x^2 - 7x + 3}{x - 1}$$

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = \; 4x - \frac{(12x-7)(x-1)-(6x^2-7x+3)}{(x-1)^2}$.

B) $f'(x) = \; 8x - \frac{(12x-7)(x-1)-(12x-7)}{(x-1)^2}$.

C) $f'(x) = \; 8x - \frac{(12x-7)(x-1)-(6x^2-7x+3)}{(x-1)^2}$.

5) Sia $f$ la funzione definita dalla legge $f(x) = \log(3x-1) + x$. Si può affermare che

A) $f$ ha più di uno zero nell'intervallo $]\frac{1}{2}, 1[$.

B) $f$ ha un unico zero nell'intervallo $]\frac{1}{2}, 1[$.

C) $f$ non si annulla nell'intervallo $]\frac{1}{2}, 1[$.

6) Dati $\underline{a}_1 = \left(-4, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\underline{a}_2 = \left(0, -1, -\frac{3}{2}\right)$, la loro combinazione lineare mediante $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ è

A) $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 = (-12, 1, 3)$.

B) $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 = (-12, -1, 3)$.

C) $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 = \left(-12, 1, \frac{3}{2}\right)$.

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

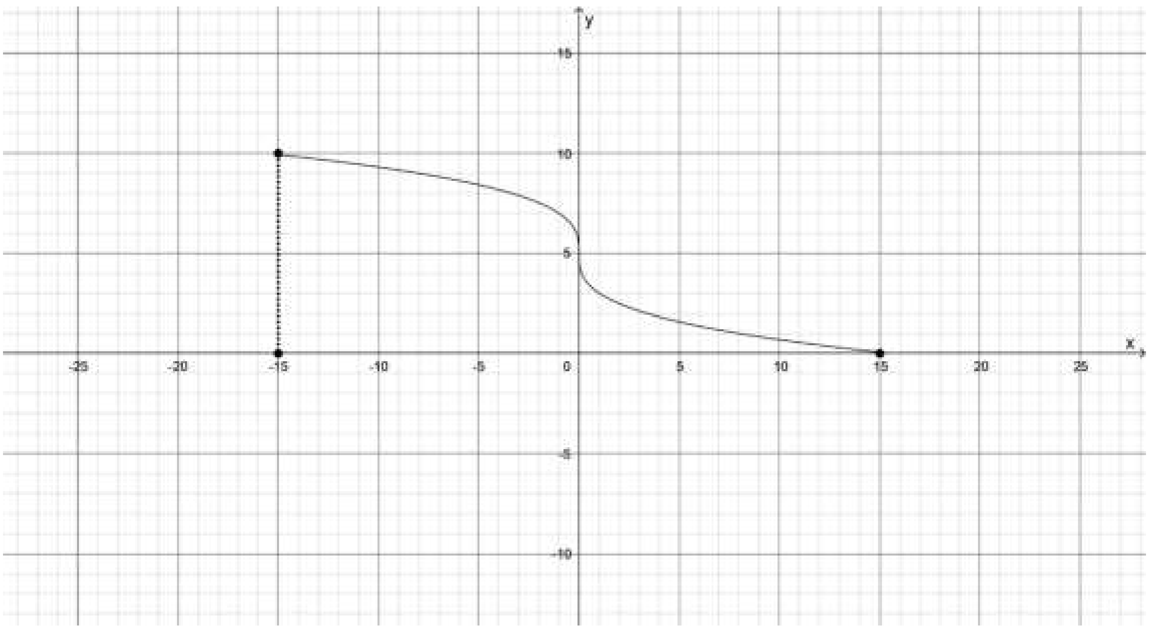
Si può affermare che

A) $A$ è una matrice diagonale.

B) $A$ è una matrice identica.

C) $A$ è una matrice singolare.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

A) $\lim_{x\to -15^+} f(x) = 0;$ $\lim_{x\to +15^-} f(x) = 0.$

B) $\lim_{x\to -15^+} f(x) = 10;$ $\nexists \lim_{x\to 0} f(x).$

~~C)~~ $\lim_{x\to -15^+} f(x) = 10\,;$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 5.$

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(-10) < 0$ $f'(5) < 0$ $f''(0) > 0.$

~~B)~~ $f'(-10) < 0$ $f'(5) < 0$ $f''(0) = 0.$

C) $f'(-10) > 0$ $f'(5) = 0$ $f''(0) = 0.$

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) nell'intervallo $[0,10]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri.

~~B)~~ nell'intervallo $[0,10]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Weierstrass.

C) nessuna delle precedenti.

**ESERCIZIO**

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = e^x(x^2 - 4x + 4)$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $[-1,1]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

a) $E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R}\} = ]-\infty, +\infty[$

b) • $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2 - 4x + 4) = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot x^2 = \underbrace{e^{-\infty}}_{\downarrow} (-\infty)^2 = 0^+ \cdot (+\infty)$ f.i.

l'esponenziale converge a 0 più velocemente di quanto diverga $x^2$

Quindi: $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \cdot x^2 = 0^+ (+\infty) = 0^+$

• $\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2 - 4x + 4) = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot x^2 = e^{+\infty} (+\infty)^2 = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$

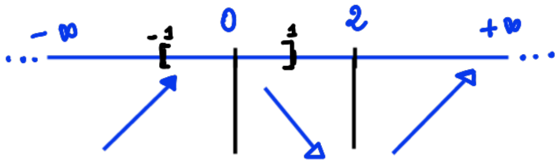
c) $f'(x) = e^x(x^2-4x+4) + e^x(2x-4) =$

$= e^x(x^2-4x+\cancel{4}+2x-\cancel{4}) =$

$= e^x(x^2-2x)$

$= e^x \cdot x(x-2)$

$$f'(x) \geq 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0 \text{ (sempre)}} \cdot x(x-2) \geq 0 \iff \underset{x=0}{x}\underset{x=2}{(x-2)} \geq 0 \iff x \leq 0 \vee x \geq 2$$




$f(x)$ è strett. crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]2, +\infty[$

$f(x)$ è strett. decrescente in $]0, 2[$

- $x=0$ p.to max. relativo

  e $f(0) = e^0(0^2-4\cdot 0+4) = 1\cdot 4 = 4$

- $x=2$ p.to min. relativo

  e $f(2) = e^2(2^2-4\cdot 2+4) = e^2(\cancel{4}-\cancel{8}+\cancel{4}) = e^2\cdot 0 = 0$

d) $f(x)$ è una funzione continua in $E[f(x)]$ per il teorema sulla continuità delle funzioni composte. Poiché l'intervallo $I=[-1,1]$ è un sottoinsieme proprio di $E[f(x)]$, la funzione $f(x)$ è continua nel compatto $I$, dunque in $I$ vale il teorema di Weierstrass.

Candidati: $x=-1$, $x=1$, $x=0$.

- $f(-1) = e^{-1}[(-1)^2-4\cdot(-1)+4] = e^{-1}(1+4+4) = 9e^{-1} \simeq 3.3109$
- $f(1) = e[1^2-4\cdot 1+4] = e(1-\cancel{4}+\cancel{4}) = e \simeq 2.7183$ (valore minimo in $I$)
- $f(0) = 4$ (valore massimo in $I$)

Conclusione:

$f(x)=e$ è il minimo assoluto di $f$ in $I$ e $x=1$ il punto di minimo assoluto in cui si realizza.

$f(x)=4$ è il massimo assoluto di $f$ in $I$ e $x=0$ il punto di massimo assoluto in cui si realizza.

# INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

## C.d.S. in Economia e Management

### II Prova Intercorso – 13 dicembre 2023

Cognome: ____________________________________________

Nome: ______________________________________________

Matricola: ___________________________________________

| Domanda n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Risposta | A | C | A | B | C | A | C | A | B | B |

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} \log_2\left(e^{x^3+4x^2-5}\right)$$

si può affermare che

A) $\lim_{x\to-\infty} \log_2\left(e^{x^3+4x^2-5}\right) = -\infty.$

B) $\lim_{x\to-\infty} \log_2\left(e^{x^3+4x^2-5}\right) = +\infty.$

C) $\lim_{x\to-\infty} \log_2\left(e^{x^3+4x^2-5}\right) = 0.$

2) Dati $0 < a < 1$ e la funzione $f$ definita mediante la legge $f(x) = \log_a x$, si può affermare che

A) $f$ è strettamente crescente e concava in $]0, +\infty[$.

B) $f$ è strettamente decrescente e concava in $]0, +\infty[$.

C) $f$ è strettamente decrescente e convessa in $]0, +\infty[$.

3) Data una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ che ammette derivata prima in $x \in X$, si può affermare che

A) se $f'(x) < 0$, $f$ è decrescente.

B) se $f'(x) > 0$, $f$ è decrescente.

C) se $f'(x) < 0$, $f$ è crescente.

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = 5x^3 - \sqrt{3x^2 - 2x + 5}$$

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = 15x^3 - \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+5}}$ .

B) $f'(x) = 15x^2 - \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+5}}$ .

C) $f'(x) = 15x^2 - \frac{6x^2-2x}{2\sqrt{3x^2-2x+5}}$.

5) Sia $f$ la funzione definita dalla legge $f(x) = e^x + x$. Si può affermare che

A) $f$ ha più di uno zero nell'intervallo $]0,1[$.

B) $f$ ha un unico zero nell'intervallo $]0,1[$.

C) $f$ non si annulla nell'intervallo $]0,1[$.

6) Dati $\underline{a}_1 = \left(4, \frac{5}{2}, -1\right)$, $\underline{a}_2 = \left(-2, -1, \frac{3}{2}\right)$ e il prodotto scalare $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2'$, si può affermare che

A) $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2' = -12$.

B) $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2' = -4$.

C) $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2' = 0$.

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

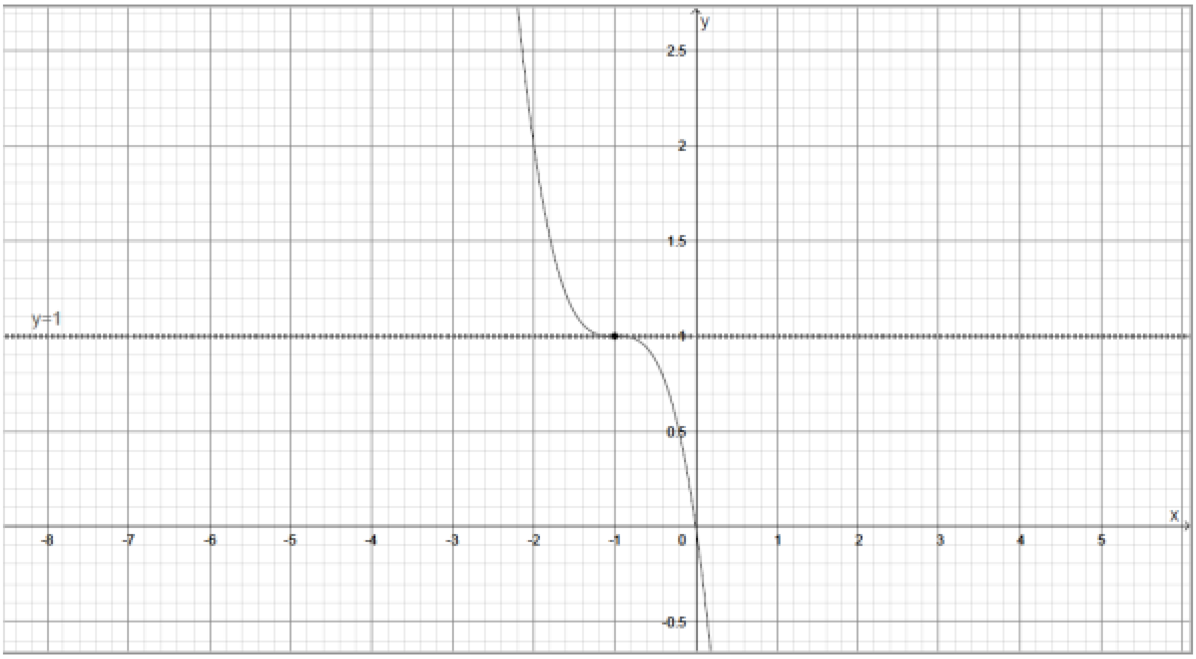
Si può affermare che

A) $A$ è una matrice diagonale.

B) $A$ è una matrice identica.

C) $A$ è una matrice non singolare.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

A) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

B) $\lim_{x\to-1} f(x) = 1$; $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

C) $\nexists \lim_{x\to-1} f(x)$; $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(-2) > 0 \quad f'(0) < 0 \quad f''(0) > 0$.

B) $f'(-2) < 0 \quad f'(0) < 0 \quad f''(0) < 0$.

C) $f'(-2) < 0 \quad f'(0) < 0 \quad f''(0) = 0$.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) nell'intervallo $[-2, -1]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri.

B) il minimo assoluto della funzione nella restrizione $[-2, -1]$ è 1.

C) nessuna delle precedenti.

**ESERCIZIO**

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{1}{2} x \log x$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

a) $E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = ]0, +\infty[$

b) • $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} x \log x = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} x \log x = \frac{1}{2} \cdot (0^+) \log(0^+) = \frac{1}{2} (0^+)(-\infty)$ f.i.

Tuttavia: $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \log_a x = 0$ con $\alpha > 1$ e $a > 0$ e $a \neq 1$

Quindi: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} x \log x = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0^+} x \log x = \frac{1}{2} (0^+)(-\infty) = \frac{1}{2} \cdot (0^-) = 0^-$

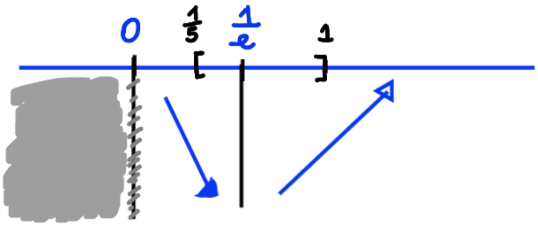


• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} x \log x = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} x \log x = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) \log(+\infty) = \frac{1}{2} (+\infty)(+\infty) = \frac{1}{2} (+\infty) = +\infty$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}\left[\log x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right] = \frac{1}{2}(\log x + 1)$

$f'(x) \geq 0 \iff \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0}(\log x + 1) \geq 0 \iff \log x + 1 \geq 0 \iff \log x \geq -1 \iff$

$\iff x \geq e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0.3679$



$f(x)$ è strett. decrescente in $\left]0, \frac{1}{e}\right[$

$f(x)$ è strett. crescente in $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$

$x = \frac{1}{e}$ è punto di minimo relativo

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \log\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{2e} \simeq -0.1839$

d) $f(x)$ è una funzione continua in $E[f(x)]$ per il teorema sulla continuità delle funzioni composte. Poiché l'intervallo $I = [\frac{1}{5}, 1]$ è un sottoinsieme proprio di $E[f(x)]$, la funzione $f(x)$ è continua nel compatto $I$, dunque in $I$ vale il teorema di Weierstrass.

Candidati: $x = \frac{1}{5}$, $x = 1$, $x = \frac{1}{e}$.

- $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \log\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10} \log\left(\frac{1}{5}\right) \simeq -0.1609$
- $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \underbrace{\log(1)}_{0} = 0$ (valore massimo in I)
- $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e} \simeq -0.1839$ (valore minimo in I)

Conclusione:

$f(x) = -\frac{1}{2e}$ è il minimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = \frac{1}{e}$ il punto di minimo assoluto in cui si realizza.

$f(x) = 0$ è il massimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = 1$ il punto di massimo assoluto in cui si realizza.

Prova C

# INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

## C.d.S. in Economia e Management

**II Prova Intercorso – 13 dicembre 2023**

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

| Domanda n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Risposta | A | B | C | A | B | B | C | B | C | A |

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}+7x^3+4x^2}$$

si può affermare che

A) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}+7x^3+4x^2} = 0.$

B) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}+7x^3+4x^2} = +\infty.$

C) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}+7x^3+4x^2} = 1.$

2) Data una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ che ammette derivata prima e seconda, si può affermare che

A) $f$ è crescente se e solo se $f''(x) > 0$ .

B) se $f'(x) > 0, f$ è crescente indipendentemente dal segno di $f''$.

C) se $f'(x) < 0, f$ è crescente indipendentemente dal segno di $f''$.

3) Siano $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0$ un punto interno al suo dominio. Il rapporto incrementale di $f$ relativo al punto $x_0$ rappresenta

A) l'intercetta di una retta secante il grafico della funzione e passante per il punto di ascissa $x_0$.

B) il coefficiente angolare della retta tangente il grafico della funzione nel punto di ascissa $x_0$.

C) il coefficiente angolare di una retta secante il grafico della funzione e passante per il punto di ascissa $x_0$.

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = \log(x^2 - 3x - 7) + \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x-7} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

B) $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x-7} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

C) $f'(x) = \frac{2x-3}{\log(x^2-3x-7)} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5) Sia $f$ la funzione definita dalla legge $f(x) = e^{3x} + 2x$. Si può affermare che

A) $f$ ha più di uno zero nell'intervallo $]-\frac{1}{2}, 0[$.

B) $f$ ha un unico zero nell'intervallo $]-\frac{1}{2}, 0[$.

C) $f$ non si annulla nell'intervallo $]-\frac{1}{2}, 0[$.

6) Dati i due vettori riga $\underline{a}_1 = (-2, 1, 7)$, $\underline{a}_2 = (-2, 5, 0)$, si può affermare che

A) può essere definito il prodotto scalare $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2$ .

B) può essere definito il prodotto scalare $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2'$.

C) può essere definito il prodotto scalare $\underline{a}_1' \cdot \underline{a}_2'$.

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

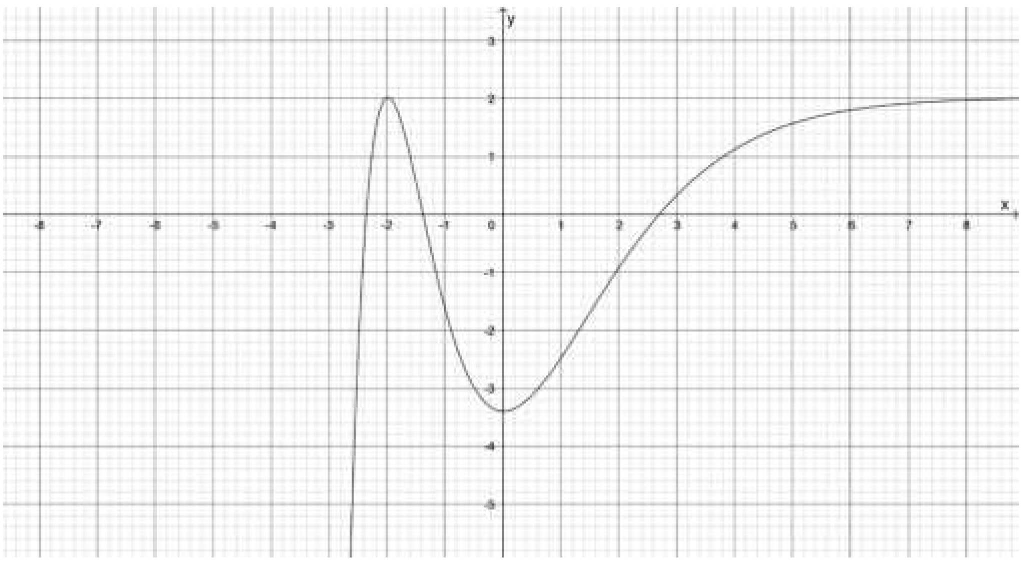
Si può affermare che

A) $\det(A) = -17$.

B) $\det(A) = 11$.

C) $\det(A) = -11$.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

A) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

~~B)~~ $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

C) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(-2) = 0 \quad f'(6) > 0 \quad f''(6) > 0$.

B) $f'(-2) < 0 \quad f'(6) > 0 \quad f''(6) < 0$.

~~C)~~ $f'(-2) = 0 \quad f'(6) > 0 \quad f''(6) < 0$.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

~~A)~~ nell'intervallo $[-2, -1]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri.

B) nell'intervallo $[-2, -1]$ la funzione ammette massimo assoluto ma non ammette minimo assoluto.

C) nessuna delle precedenti.

**ESERCIZIO**

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x-2}{e^{-2x}}$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $[0, 2]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

a) $E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : e^{-2x} \neq 0\} = ]-\infty, +\infty[$

b) • $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{e^{-2x}} = \frac{-\infty - 2}{e^{-2(-\infty)}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{+\infty}$ f.i.

l'esponenziale diverge a $\infty$ più velocemente di $x$

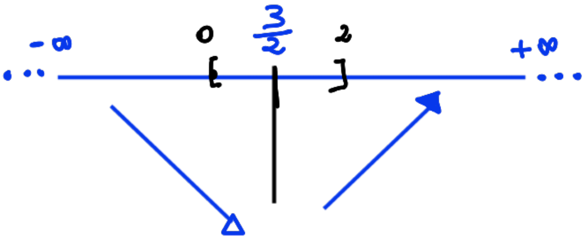
Quindi: $\lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{e^{-2x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0^-$

• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{e^{-2x}} = \frac{+\infty - 2}{e^{-2(+\infty)}} = \frac{+\infty}{e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

c) $f'(x) = \dfrac{e^{-2x} - (x-2)e^{-2x}(-2)}{(e^{-2x})^2} = \dfrac{e^{-2x} + 2(x-2)e^{-2x}}{(e^{-2x})^2} =$

$$= \frac{\cancel{e^{-2x}}(1 + 2x - 4)}{(e^{-2x})^{\cancel{2}}} = \frac{2x-3}{e^{-2x}}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{2x-3}{\underset{\vee \atop 0}{e^{-2x}}} \geq 0 \iff 2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2} = 1.5$$




$f(x)$ è strett. decrescente in $]-\infty, \frac{3}{2}[$

$f(x)$ è strett. crescente in $]\frac{3}{2}, +\infty[$

$x = \frac{3}{2}$ è punto di minimo relativo

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2} - 2}{e^{-\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right)}} = \frac{\frac{3-4}{2}}{e^{-3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^{-3}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{-3}} = -\frac{1}{2}e^{3} \simeq -10.04$$

d) $f(x)$ è una funzione continua in $E[f(x)]$ per il teorema sulla continuità delle funzioni composte. Poiché l'intervallo $I = [0, 2]$ è un sottoinsieme proprio di $E[f(x)]$, la funzione $f(x)$ è continua nel compatto $I$, dunque in $I$ vale il teorema di Weierstrass.

Candidati: $x = 0$, $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$.

- $f(0) = \dfrac{-2}{e^{-2\cdot 0}} = \dfrac{-2}{e^{0}} = \dfrac{-2}{1} = -2$
- $f(2) = \dfrac{2-2}{e^{-2\cdot 2}} = \dfrac{0}{e^{-4}} = 0$ (valore massimo in $I$)
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{3} \simeq -10.04$ (valore minimo in $I$)

Conclusione:

$f(x) = -\frac{e^{3}}{2}$ è il minimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = \frac{3}{2}$ il punto di minimo assoluto in cui si realizza.

$f(x) = 0$ è il massimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = 2$ il punto di massimo assoluto in cui si realizza.

Prova D

# INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

## C.d.S. in Economia e Management

### II Prova Intercorso – 13 dicembre 2023

Cognome: ____________________________________________

Nome: ______________________________________________

Matricola: ___________________________________________

| Domanda n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Risposta | C | B | C | B | B | A | C | C | B | C |

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right)$$

si può affermare che

A) $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right) = 0.$

B) $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right) = +\infty.$

C) $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right) = -\infty.$

2) Siano $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ un punto in cui $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$. Si può affermare che

A) $x_0$ è un punto di minimo relativo.

B) $x_0$ è un punto di massimo relativo.

C) $x_0$ è un punto di flesso.

3) Data una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ che ammette derivata seconda, si può affermare che

A) se $f''(x) > 0, f$ è concava.

B) se $f''(x) = 0, f$ è concava.

C) se $f''(x) > 0, f$ è convessa.

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = 3x^4e^{x^2-4x+2}$$

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = 12x^4 e^{x^2-4x+2} + 12x^3(2x-4)e^{x^2-4x+2}$ .

B) $f'(x) = 12x^3 e^{x^2-4x+2} + (6x^5 - 12x^4)e^{x^2-4x+2}$.

C) $f'(x) = 12x^3 e^{2x-4}$ .

5) Sia $f$ la funzione definita dalla legge $f(x) = x + 2\log x - 2$. Si può affermare che

A) $f$ ha più di uno zero nell'intervallo [1,2].

B) $f$ ha un unico zero nell'intervallo [1,2].

C) $f$ non si annulla nell'intervallo [1,2].

6) Dati $\underline{a}_1 = (-1,4,-3)$, $\underline{a}_2 = \left(2,0,-\frac{1}{2}\right)$, la loro combinazione lineare mediante $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ è

A) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (-5,12,-\frac{17}{2})$.

B) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (-5,12,-17)$.

C) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = \left(5,-12,-\frac{17}{2}\right)$.

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

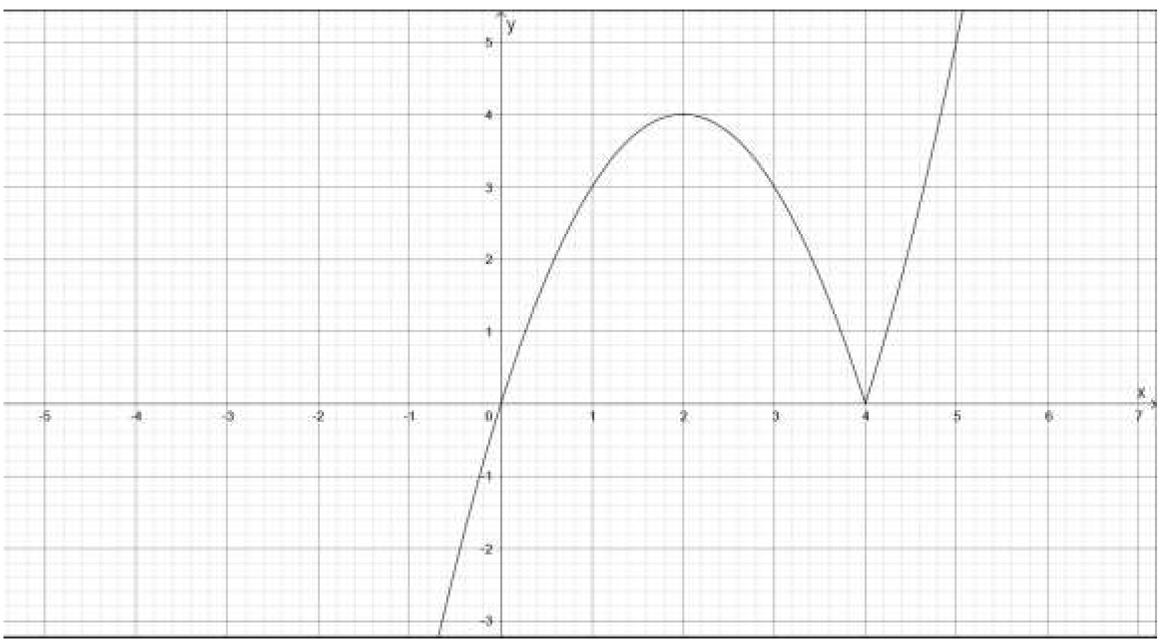
Si può affermare che

A) $A$ è una matrice triangolare superiore.

B) $A$ è una matrice singolare.

C) $A$ è una matrice non singolare.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

A) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty;$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$

B) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty;$ $\nexists \lim_{x\to 4} f(x).$

C) $\lim_{x\to 4} f(x) = 0\,;$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(2) > 0$ $f''(2) > 0$ $f'(4) = 0.$

B) $f'(2) = 0$ $f''(2) < 0$ $\nexists f'(4).$

C) $f'(2) = 0$ $f''(2) > 0$ $f'(4) = 0.$

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) nell'intervallo $[1,2]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri.

B) nell'intervallo $[1,2]$ la funzione ammette massimo assoluto ma non ammette minimo assoluto.

C) nessuna delle precedenti.

**ESERCIZIO**

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\log(x-1)}{x-1}$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $[2, 6]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

a) $E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x-1>0\} = ]1, +\infty[$

$x-1>0 \iff x>1$

b) • $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{x-1} = \frac{\log(1^+-1)}{1^+-1} = \frac{\log(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x-1)}{x-1} = \frac{\log(+\infty-1)}{+\infty-1} = \frac{\log(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ f.i.

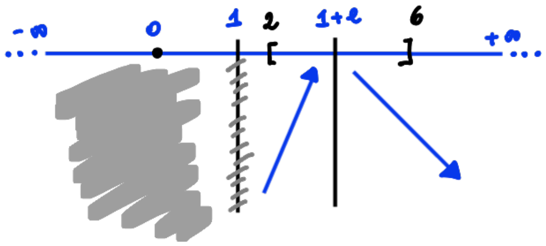
la potenza x diverge a ∞ più velocemente del logaritmo

Quindi: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x-1)}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0^+$

c) $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x-1}} \cdot \cancel{(x-1)} - \log(x-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1 - \log(x-1)}{(x-1)^2}$

$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1 - \log(x-1)}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0}} \geq 0 \iff 1 - \log(x-1) \geq 0 \iff$

$\log(x-1) - 1 \leq 0 \iff \log(x-1) \leq 1 \iff \begin{cases} x-1 \leq e \\ x-1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 1+e \\ x > 1 \quad (\text{C.E.}) \end{cases} \iff 1 < x \leq 1+e$




$f(x)$ è strett. crescente in $]1, 1+e[$

$f(x)$ è strett. decrescente in $]1+e, +\infty[$

$x = 1+e$ è punto di massimo relativo

$f(1+e) = \frac{\log(\cancel{1}+e-\cancel{1})}{\cancel{1}+e-\cancel{1}} = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e} \simeq 0.3679$

d) $f(x)$ è una funzione continua in $E[f(x)]$ per il teorema sulla continuità delle funzioni composte. Poiché l'intervallo $I = [2, 6]$ è un sottoinsieme proprio di $E[f(x)]$, la funzione $f(x)$ è continua nel compatto $I$, dunque in $I$ vale il teorema di Weierstrass.

Candidati: $x = 2$, $x = 6$, $x = e+1$

- $f(2) = \frac{\log(2-1)}{2-1} = \frac{\log 1}{1} = \log 1 = 0$ (valore minimo in $I$)

- $f(6) = \frac{\log(6-1)}{6-1} = \frac{\log 5}{5} \simeq 0.3219$

- $f(e+1) = \frac{1}{e} \simeq 0.3679$ (valore massimo in $I$)

Conclusione:

$f(x) = 0$ è il minimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = 2$ il punto di minimo assoluto in cui si realizza.

$f(x) = \frac{1}{e}$ è il massimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = e+1$ il punto di massimo assoluto in cui si realizza

# INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

## C.d.S. in Economia e Management

### II Prova Intercorso – 18 dicembre 2023

Cognome: ____________________________________________

Nome: ______________________________________________

Matricola: ___________________________________________

| Domanda n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Risposta | C | C | B | A | C | A | C | B | A | B |

**NOTA**: Si prega di riportare le risposte in tabella.

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \log_5\left(\frac{2x^3-5x+3}{8x^5+3x-1}\right)$$

si può affermare che

A) $\lim_{x\to+\infty} \log_5\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right) = 0.$

B) $\lim_{x\to+\infty} \log_5\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right) = +\infty.$

C) $\lim_{x\to+\infty} \log_5\left(\frac{x^2-4x+5}{3x-2}\right) = -\infty.$

2) Dati $0 < a < 1$ e la funzione $f$ definita mediante la legge $f(x) = a^x$, si può affermare che

A) $f$ è strettamente crescente e convessa in tutto $\mathbb{R}$.

B) $f$ è strettamente decrescente e concava in tutto $\mathbb{R}$.

C) $f$ è strettamente decrescente e convessa in tutto $\mathbb{R}$.

3) Data una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ che ammette derivata seconda, si può affermare che

A) se $f''(x) > 0, f$ è concava.

B) se $f''(x) > 0, f$ è convessa.

C) se $f''(x) < 0, f$ è convessa.

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = e^{5x^2} - \frac{5x^2-2x+1}{3x+1}$$

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = \; 10xe^{5x^2} - \frac{(10x-2)(3x+1)-3(5x^2-2x+1)}{(3x+1)^2}$.

B) $f'(x) = \; 10xe^{5x^2} - \frac{(10x-2)(3x+1)-3(12x-7)}{(3x+1)^2}$.

C) $f'(x) = \; e^{10x} \; - \frac{(10x-2)(3x+1)-3(5x^2-2x+1)}{(3x+1)^2}$.

5) Sia $f$ la funzione definita dalla legge $f(x) = \log(1-x) - 2x$. Si può affermare che

A) $f$ ha più di uno zero nell'intervallo $]-2,-1[$.

B) $f$ ha un unico zero nell'intervallo $]-2,-1[$.

C) $f$ non si annulla nell'intervallo $]-2,-1[$.

**NOTA**: log(argomento) = $\log_e$(argomento)=ln(argomento)

6) Dati $\underline{a}_1 = \left(-2,0,\frac{1}{2}\right)$, $\underline{a}_2 = (0,-1,-4)$, la loro combinazione lineare mediante $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ è

A) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (-4, 1, 5)$.

B) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (4, -1{,}5)$.

C) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (-4, -1{,}5)$.

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

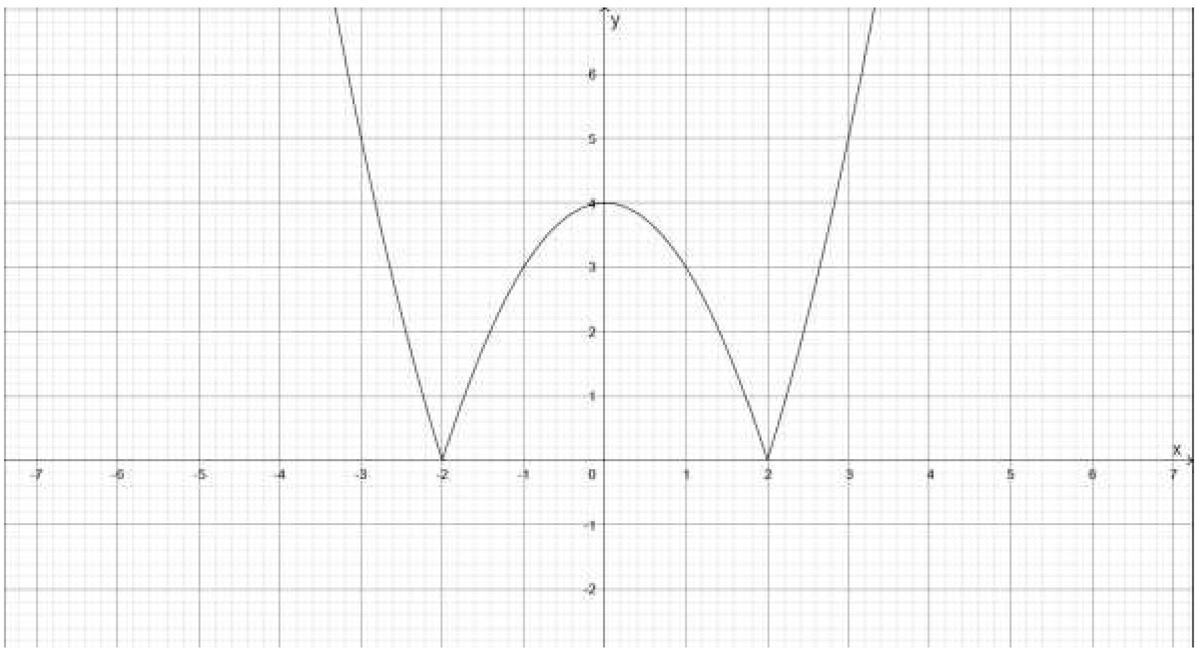
Si può affermare che

A) $A$ è una matrice diagonale.

B) $A$ è una matrice identica.

C) $A$ è una matrice non singolare.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

A) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

C) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \nexists \lim_{x\to0} f(x)$.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(-1) > 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) < 0$.

B) $f'(-1) < 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) > 0$.

C) $f'(-1) > 0 \quad f'(0) < 0 \quad f''(0) < 0$.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) nell'intervallo $[0,1]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri.

B) nell'intervallo $[0,1]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Weierstrass.

C) nessuna delle precedenti.

**ESERCIZIO**

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x-3}{e^x}$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo e calcolarne il valore;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $[3,5]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

a) $E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : e^x \neq 0\} = ]-\infty, +\infty[$

b) • $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{e^x} = \frac{-\infty-3}{\underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0^+}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ f.i.

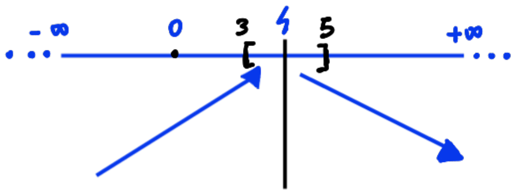
l'esponenziale diverge più velocemente di $x$

Quindi: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0^+$

c) $f'(x) = \frac{e^x - (x-3)e^x}{(e^x)^2} =$

$$= \frac{\cancel{e^x}(1-x+3)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{4-x}{e^x}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{4-x}{\underbrace{e^x}_{>0}} \geq 0 \iff 4-x \geq 0 \iff x-4 \leq 0 \iff x \leq 4$$




$f(x)$ è strett. crescente in $]-\infty, 4[$

$f(x)$ è strett. decrescente in $]4, +\infty[$

$x = 4$ è punto di massimo relativo

$$f(4) = \frac{4-3}{e^4} = \frac{1}{e^4} \simeq 0.018$$

d) $f(x)$ è una funzione continua in $E[f(x)]$ per il teorema sulla continuità delle funzioni composte. Poiché l'intervallo $I = [3,5]$ è un sottoinsieme proprio di $E[f(x)]$, la funzione $f(x)$ è continua nel compatto $I$, dunque in $I$ vale il teorema di Weierstrass.

Candidati: $x = 3$, $x = 5$, $x = 4$

- $f(3) = \frac{3-3}{e^3} = \frac{0}{e^3} = 0$ (valore minimo in I)
- $f(5) = \frac{5-3}{e^5} = \frac{2}{e^5} \simeq 0.013$
- $f(4) = \frac{1}{e^4} \simeq 0.018$ (valore massimo in I)

Conclusione:

$f(x) = 0$ è il minimo assoluto di $f$ in $I$ e $x=3$ il punto di minimo assoluto in cui si realizza.

$f(x) = \frac{1}{e^4}$ è il massimo assoluto di $f$ in $I$ e $x = 4$ il punto di massimo assoluto in cui si realizza.