INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

C.d.S. in Economia e Management

I Prova Intercorso - 30 ottobre 2023

Cognome: ____

Nome: ____

Matricola: ____

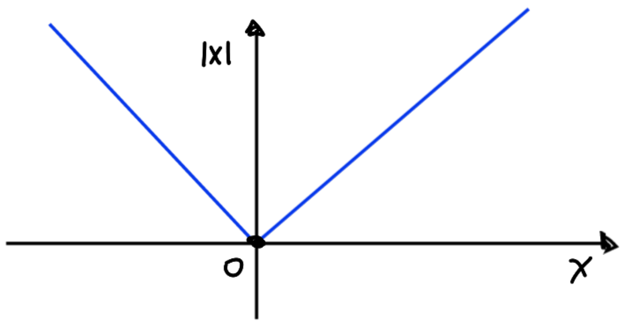
Domanda n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Risposta	B	C	A	B	C	B	A	C	C	B

1) Data una funzione $f: S \to T$, suriettiva in T, con $T =]-\infty, -2[$, si può affermare che

A) $\inf\limits_{x \in S} f(x) = -\infty$ e $\max\limits_{x \in S} f(x) = -2$.

B) $f(x)$ è limitata superiormente.

C) $\nexists \min\limits_{x \in S} f(x)$ e $\max\limits_{x \in S} f(x) = -2$.



2) Dati S e T due insiemi, una funzione $f: S \to T$

A) è iniettiva se e solo se è biunivoca.

B) se è suriettiva, allora è anche biunivoca.

C) è invertibile se e solo se è biunivoca.

3) Data f la funzione numerica definita mediante la legge $f(x) = |x|$, si può affermare che

A) f è limitata inferiormente e illimitata superiormente.

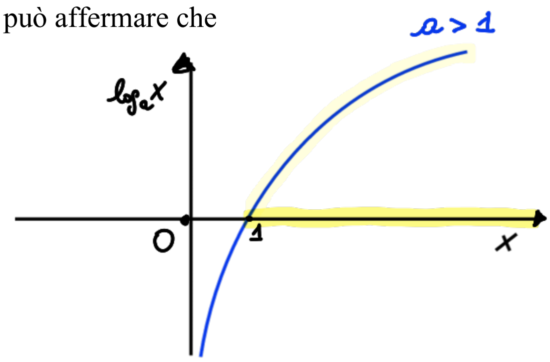
B) f è illimitata inferiormente e illimitata superiormente.

C) f è suriettiva su $\mathbb{R}$, ma non è iniettiva.

4) Dati $a > 1$ e f la funzione definita mediante la legge $f(x) = \log_a x$, si può affermare che

A) $f(x) > 0$ per $x \in]0, 1[$.

B) $f(x) > 0$ per $x \in]1, +\infty[$.



C) $f(x) < 0$ per $x \in]0, +\infty[$.

5) Data la funzione f definita mediante la legge

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+4x}}{x^2+7},$$

denominato con $E[f]$ il suo campo di esistenza, si può affermare che

A) $E[f] =]0, 4[$.

B) $E[f] =]-\infty, 0] \ \cup [4, +\infty[$.

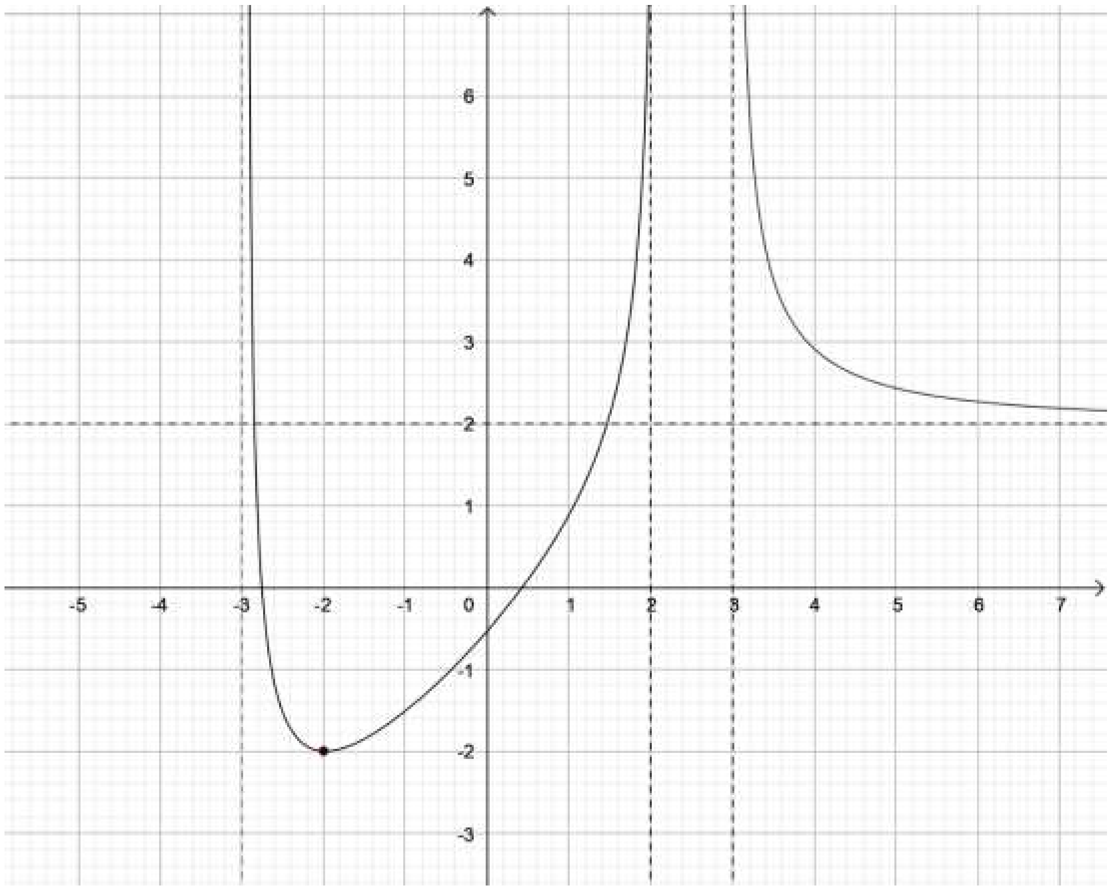
C) $E[f] = [0, 4]$.

$$\text{C.E.}: \begin{cases} -x^2+4x \geq 0 \\ x^2+7 \neq 0 \quad (\text{vera sempre}) \end{cases} \iff$$

$$\iff -x^2+4x \geq 0 \iff x^2-4x \leq 0$$

$$\iff x(x-4) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 4$$

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



6) Denominato con X il campo di esistenza di $f(x)$ e con Y la sua immagine, si può affermare che

A) $X =]-3, 2[\cup]3, +\infty[$ e $Y = \mathbb{R}$.

B) $X =]-3, 2[\cup]3, +\infty[$ e $Y = [-2, +\infty[$.

C) $X =]-3, +\infty[$ e $Y = [-2, +\infty[$.

7) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) f non è suriettiva su $\mathbb{R}$ né iniettiva.

B) f è suriettiva su $\mathbb{R}$ ma non è iniettiva.

C) f è biunivoca su $\mathbb{R}$.

8) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è invertibile.

B) $\inf_{x \in S} f(x) = -\infty$.

C) $\min_{x \in S} f(x) = -2$.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ non presenta minimi o massimi relativi.

B) $f(x) = 2$ è un massimo relativo e $x = -2$ è il punto in cui si realizza.

C) $f(x) = -2$ è un minimo relativo e $x = -2$ è il punto in cui si realizza.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è strettamente decrescente in $]-3, 0[$ e $]3, +\infty[$.

B) $f(x)$ è strettamente decrescente in $]-3, -2[$ e $]3, +\infty[$.

C) $f(x)$ è strettamente decrescente in $]-3, 2[$.

ESERCIZIO 1

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-6x+8}{3-x}\right).$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 2

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \sqrt{1 - \log(1-2x)}.$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 3

Rappresentare graficamente la funzione elementare $f(x) = a^x$, con $a > 1$, e descriverne le caratteristiche.

Prova A

Esercizio 1

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-6x+8}{3-x}\right)$$

$$E[f(x)] = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-6x+8}{3-x} > 0\right\}$$

$$\frac{x^2-6x+8}{3-x} > 0 \iff \underbrace{\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ 3-x>0 \end{cases}}_{(S1)} \cup \underbrace{\begin{cases} x^2-6x+8<0 \\ 3-x<0 \end{cases}}_{(S2)} \iff \begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x-3<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-6x+8<0 \\ x-3>0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x<3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-6x+8<0 \\ x>3 \end{cases}$$

Eq. associata

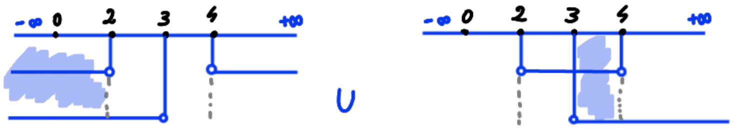
$x^2-6x+8=0$

$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4(1)(8) = 36-32 = 4 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \mp 2}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ \searrow x_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{matrix}$$

$$S1 \cup S2 \iff \begin{cases} x<2 \quad \vee x>4 \\ x<3 \end{cases} \cup \begin{cases} 2<x<4 \\ x>3 \end{cases}$$

Intersezione grafica $\rightarrow$



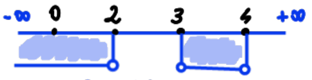
$x<2$ $\cup$ $\vee$ $3<x<4$

$\leftarrow$ Intersezione grafica

Unione grafica

$x<2$

$3<x<4$



$x<2 \quad \vee \quad 3<x<4$

$E[f(x)] = \left]-\infty, 2\right[\;\cup\; \left]3, 4\right[$ (Soluzione)

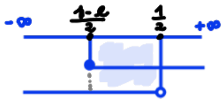
Esercizio 2

$$f(x) = \sqrt{1-\log(1-2x)}$$

$$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : 1-\log(1-2x) \geq 0\}$$

$$1-\log(1-2x) \geq 0 \iff \log(1-2x)-1 \leq 0 \iff \log(1-2x) \leq 1 \iff \begin{cases} 1-2x \leq e \\ 1-2x>0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x-1 \geq -e \\ 2x-1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \geq 1-e \\ 2x<1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1-e}{2} \simeq -0.85 < 0 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

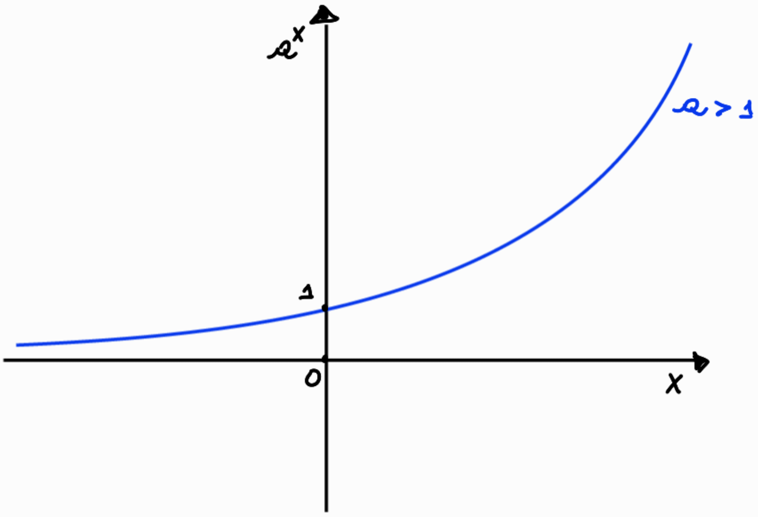


$\frac{1-e}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

$E[f(x)] = \left[\frac{1-e}{2}, \frac{1}{2}\right[$ (Soluzione)

Esercizio 3

Prova A



Legge: $f : X \in \mathbb{R} \to f(x) = a^x \in \mathbb{R}^+, \; a > 1$

Dominio: $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

$\inf f(x) = 0$

$\sup f(x) = +\infty$

f è limitata inferiormente e illimitata superiormente

Estremi Relativi: NO

Monotonia: f è strettamente crescente $\forall x \in X$

Funzione né pari né dispari

Funzione suriettiva su $\mathbb{R}^+$
Funzione iniettiva
$\Big\} \Rightarrow f$ è biunivoca $\Leftrightarrow f$ è invertibile

Funzione inversa: $f^{-1}(y) = \log_a y$

Prova B

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

C.d.S. in Economia e Management

I Prova Intercorso - 30 ottobre 2023

Cognome: ____

Nome: ____

Matricola: ____

Domanda n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Risposta	B	B	C	B	B	A	C	A	C	B

1) Si consideri una funzione $f: S \to T =]-1, 1[$. Si scelga un'alternativa

A) $\nexists \min\limits_{x \in S} f(x)$ e $\max\limits_{x \in S} f(x) = 1$.

B) $\nexists \min\limits_{x \in S} f(x)$ e $\nexists \max\limits_{x \in S} f(x)$.

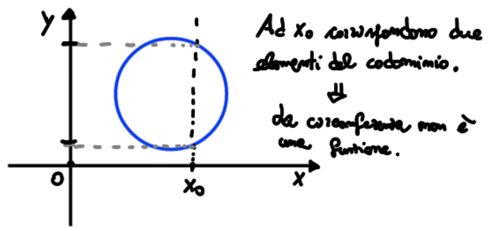
C) $\min\limits_{x \in S} f(x) = -1$ e $\nexists \max\limits_{x \in S} f(x)$.

2) Dati due insiemi S e T, la relazione che lega i due insiemi è una funzione $f: S \to T$ se e soltanto se

A) associa ad elementi diversi di S elementi diversi di T.

B) associa ad ogni elemento di S uno ed uno solo elemento di T.

C) associa ad ogni elemento di S almeno un elemento di T.

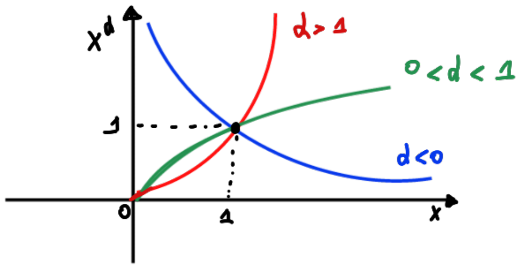


3) Data f la funzione numerica definita mediante la legge $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$, si può affermare che

A) f è illimitata inferiormente e limitata superiormente.

B) f è limitata sia inferiormente che superiormente.

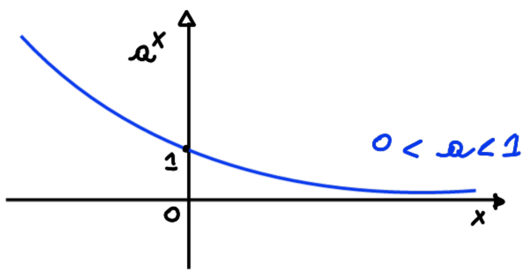
C) f è invertibile.



4) Dati $0 < a < 1$ e f la funzione definita mediante la legge $f(x) = a^x$, si può affermare che

A) $f(x) < 0$ per $x \in]0, +\infty[$.

B) $f(x) > 0$ per $x \in]-\infty, +\infty[$.



C) $f(x) < 0$ per $x \in]-\infty, +\infty[$.

5) Data la funzione f definita mediante la legge

$$f(x) = \frac{\log(|x-3|+2)}{x^2-1},$$

denominato con $E[f]$ il suo campo di esistenza, si può affermare che

$$C.E.: \begin{cases} |x-3|+2>0 \text{ (sempre vera)} \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \iff$$

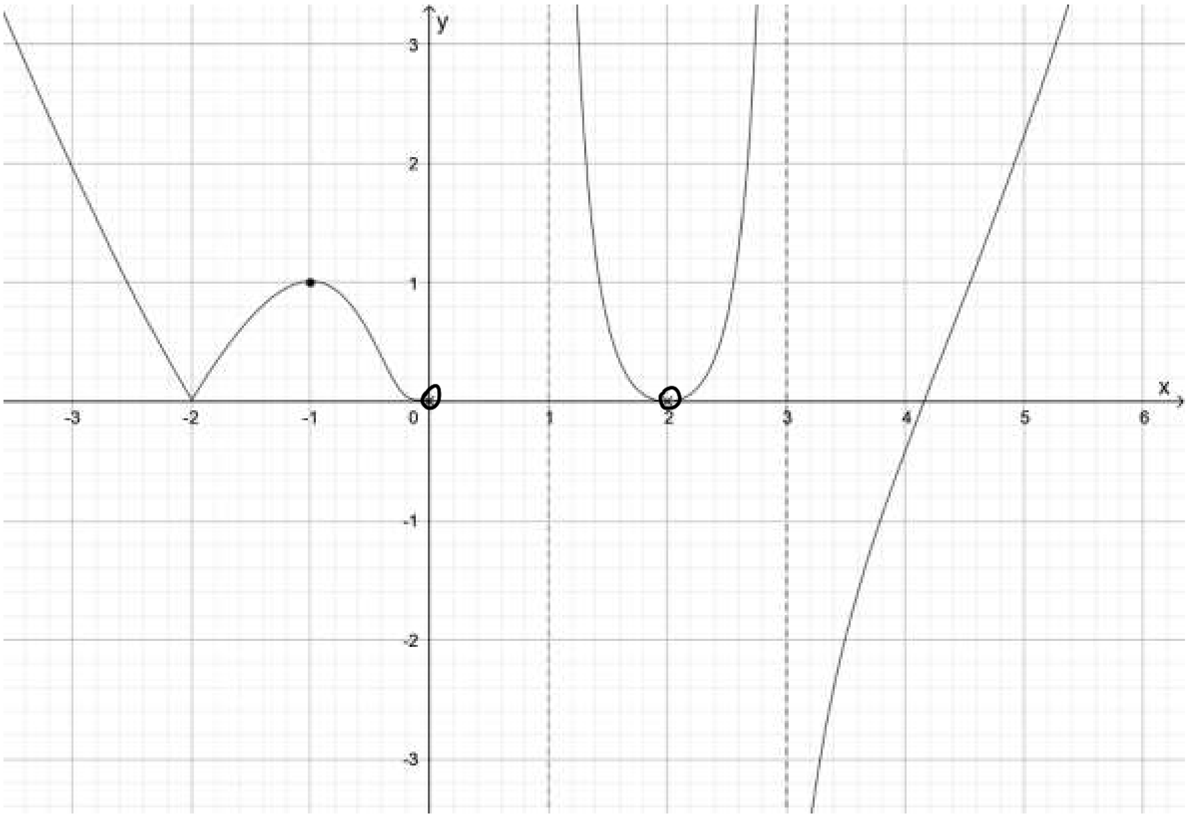
$$\iff x^2-1\neq 0 \iff (x+1)(x-1)\neq 0 \implies x \neq -1, \quad x \neq 1$$

A) $E[f] =]1, +\infty[$.

B) $E[f] =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

C) $E[f] =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



6) Denominato con X il campo di esistenza di $f(x)$ e con Y la sua immagine, si può affermare che

A) $X =]-\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$ e $Y = \mathbb{R}$.

B) $X =]-\infty, 0[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$ e $Y = \mathbb{R}$.

C) $X =]-\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$ e $Y =]0, +\infty[$.

7) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è iniettiva ma non suriettiva su $\mathbb{R}$.

B) $f(x)$ è biunivoca.

C) $f(x)$ è suriettiva su $\mathbb{R}$ ma non iniettiva.

8) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è illimitata inferiormente e illimitata superiormente.

B) $f(x)$ è illimitata inferiormente e limitata superiormente.

C) $f(x)$ è limitata inferiormente e illimitata superiormente.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ non ammette zeri.

B) $f(x)$ ammette un unico zero.

C) $f(x)$ ammette più di uno zero.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ non presenta minimi o massimi relativi.

B) $f(x) = 1$ è un massimo relativo e $f(x) = 0$ è un minimo relativo.

C) $f(x) = 1$ è un massimo relativo e $x = 1$ è il punto in cui si realizza.

ESERCIZIO 1

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x+2}}.$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 2

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \log(1 - e^{4x^2-5x+1}).$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 3

Rappresentare graficamente la funzione elementare $f(x) = x^n$, con n pari, e descriverne le caratteristiche.

Prova B

Esercizio 1

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x+2}}$$

$$E[f(x)]=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{x^2-3x+2}{x+2}\geq 0\right\}$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x+2}\geq 0 \iff \underbrace{\begin{cases}x^2-3x+2\geq 0\\ x+2>0\end{cases}}_{(S1)} \cup \underbrace{\begin{cases}x^2-3x+2\leq 0\\ x+2<0\end{cases}}_{(S2)} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x^2-3x+2\geq 0\\ x>-2\end{cases} \cup \begin{cases}x^2-3x+2\leq 0\\ x<-2\end{cases}$$

Eq. associata

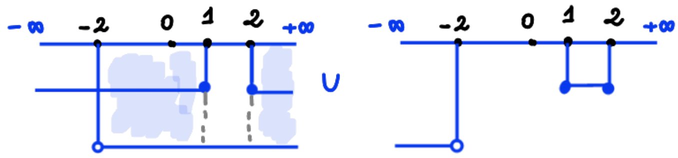
$x^2-3x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1>0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\mp1}{2}\quad x_1=\frac{2}{2}=1,\quad x_2=\frac{4}{2}=2$$

$$S1\cup S2 \iff \begin{cases}x\leq 1 \vee x\geq 2\\ x>-2\end{cases} \cup \begin{cases}1\leq x\leq 2\\ x<-2\end{cases}$$

Intersezione grafica →



← Intersezione grafica

$-2<x\leq 1 \vee x\geq 2$ V $\emptyset$

Poiché S2 non ha soluzione, l'unione dei due sistemi coincide con la soluzione di S1.

$E[f(x)]=\,]-2,1]\cup[2,+\infty[$ (Soluzione)

∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘ ∼ ∘

Esercizio 2

$f(x)=\log\left(1-e^{4x^2-5x+1}\right)$

$E[f(x)]=\{x\in\mathbb{R}:\ 1-e^{4x^2-5x+1}>0\}$

$1-e^{4x^2-5x+1}>0 \iff e^{4x^2-5x+1}-1<0 \iff e^{4x^2-5x+1}<1 \iff 4x^2-5x+1<\underbrace{\log 1}_{=0} \iff$

$\iff 4x^2-5x+1<0$

Eq. associata

$4x^2-5x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(4)(1)=25-16=9>0$

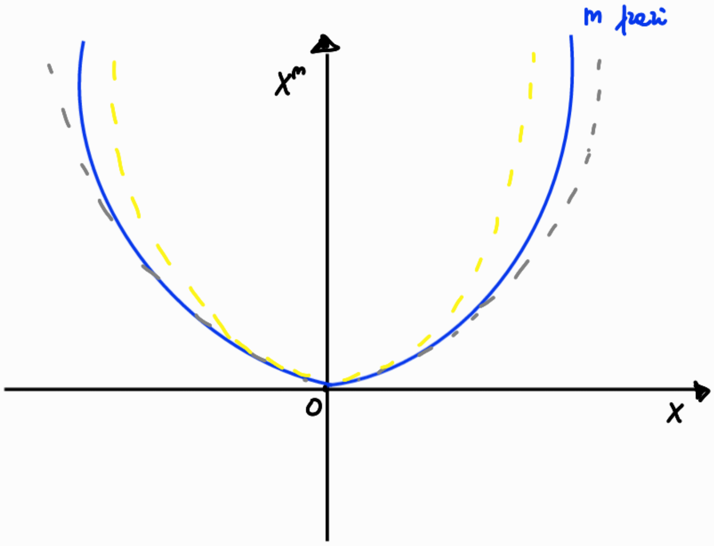
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+5\pm\sqrt{9}}{2(4)}=\frac{5\mp3}{8}\quad x_1=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\quad x_2=\frac{8}{8}=1$$

$4x^2-5x+1<0 \iff \frac{1}{4}<x<1$

$E[f(x)]=\,]\frac{1}{4},1[$ (Soluzione)

Esercizio 3

Prova B



Legge: $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^m \in \mathbb{R}_0^+$, m pari

Dominio: $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

$\min f(x) = 0$

$\sup f(x) = +\infty$

f è limitata inferiormente e illimitata superiormente

Estremi Relativi: $f(x) = 0$ è minimo relativo e $x = 0$ il punto in cui si realizza

Monotonia: f è strettamente decrescente $\forall x \in]-\infty, 0[$

f è strettamente crescente $\forall x \in]0, +\infty[$

Funzione pari: $f(-x) = f(x)$

Funzione suriettiva su $\mathbb{R}_0^+$
Funzione non iniettiva $\Big\} \Rightarrow f$ non è biunivoca $\Leftrightarrow f$ non è invertibile

F è invertibile solo in una restrizione in cui è monotona, ad esempio $[0, +\infty[$.

Funzione inversa in $[0, +\infty[$: $f^{-1}(y) = \sqrt[m]{y}$

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

C.d.S. in Economia e Management

I Prova Intercorso - 30 ottobre 2023

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Domanda n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Risposta	B	B	A	C	A	B	C	B	A	C

1) Data una funzione $f: S \to T$, suriettiva in T, con $T = [3, +\infty[$, si può affermare che

A) $\min_{x \in S} f(x) = 3$ e $f(x)$ è limitata superiormente.

B) $f(x)$ è limitata inferiormente.

C) $\nexists \min_{x \in S} f(x)$ e $\sup_{x \in S} f(x) = +\infty$.

2) Dati S e T due insiemi, una funzione $f: S \to T$ si dice suriettiva se

A) ad ogni elemento del codominio corrisponde al più un elemento del dominio.

B) ad ogni elemento del codominio corrisponde almeno un elemento del dominio.

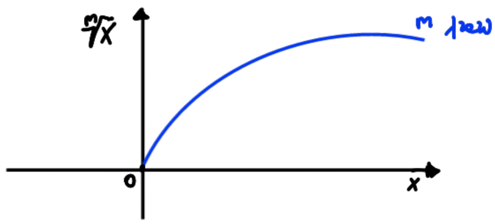
C) nessuna delle precedenti.

3) Data la funzione numerica definita mediante la legge $f(x) = \sqrt[n]{x}$, con n pari, si può affermare che

A) f non è suriettiva su $\mathbb{R}$, ma è iniettiva.

B) f è illimitata inferiormente e illimitata superiormente.

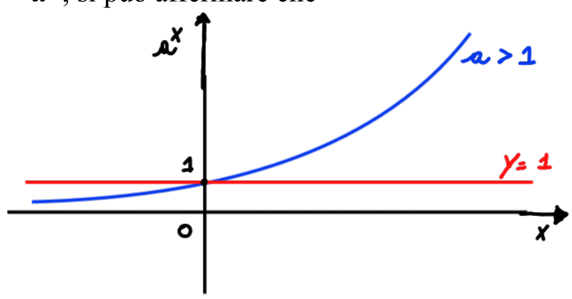
C) f è suriettiva su $\mathbb{R}$, ma non è iniettiva.



4) Dati $a > 1$ e f la funzione definita mediante la legge $f\ (x) =\ a^x$, si può affermare che

A) $f(x) > 1$ per $x \in]-\infty, +\infty[$.

B) $f(x) > 1$ per $x \in]-\infty, 0[$.



C) $f(x) > 1$ per $x \in]0, +\infty[$.

5) Data la funzione f definita mediante la legge

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{|e^x - 1| + 2}$$

C.E.: $|e^x - 1| + 2 \neq 0 \iff$

$|e^x - 1| \neq -2$ (sempre vera)

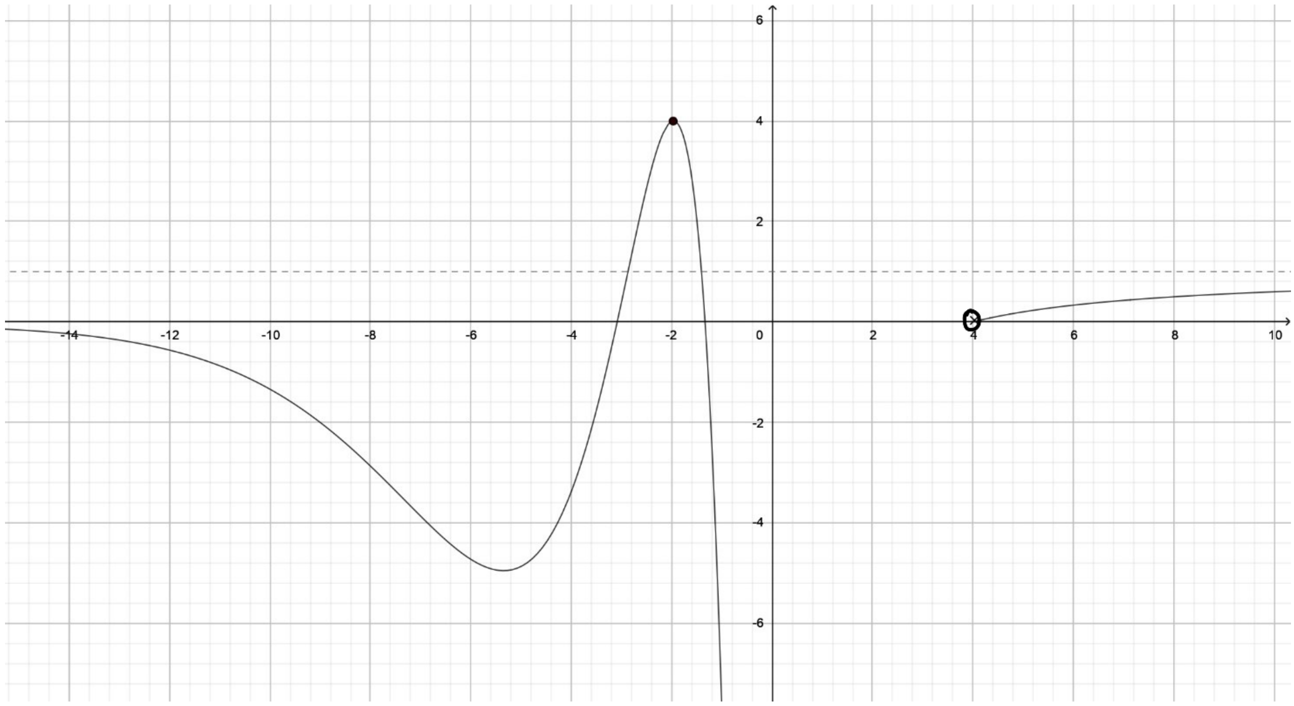
denominato con $E[f]$ il suo campo di esistenza, si può affermare che

A) $E[f] =]-\infty, +\infty[$.

B) $E[f] =]-\infty, 0[\, \cup]0, +\infty[$.

C) $E[f] =]-\infty, -2[\, \cup]0, +\infty[$.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



6) Denominato con X il campo di esistenza di $f(x)$ e con Y la sua immagine, si scelga un'alternativa

A) $X = \mathbb{R}$ e $Y =]-\infty, 4]$.

B) $X =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ e $Y =]-\infty, 4]$.

C) $X =]-\infty, 0[\cup]0,4[\cup]4, +\infty[$ e $Y =]-\infty, 4[$.

7) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è biunivoca su $\mathbb{R}$.

B) $f(x)$ è suriettiva su $\mathbb{R}$ ma non è iniettiva.

C) $f(x)$ non è né suriettiva su $\mathbb{R}$ né iniettiva.

8) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è limitata inferiormente e illimitata superiormente.

B) $f(x)$ ammette massimo assoluto.

C) $f(x)$ è illimitata inferiormente e illimitata superiormente.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ ammette più di uno zero.

B) $f(x)$ ammette un unico zero.

C) $f(x)$ non ammette zeri.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ non presenta minimi o massimi relativi.

B) $f(x) = -2$ è un massimo relativo.

C) $f(x) = 4$ è un massimo relativo.

ESERCIZIO 1

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x^2-6x+5}\right).$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 2

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{x^2+x-6}}.$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 3

Rappresentare graficamente la funzione elementare $f(x) = x^n$, con n dispari, e descriverne le caratteristiche.

Esercizio 1

Prova C

$$f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x^2-6x+5}\right)$$

$$E[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x^2-6x+5} > 0 \right\}$$

$$\frac{x-3}{x^2-6x+5} > 0 \iff \overset{(S1)}{\begin{cases} x-3>0 \\ x^2-6x+5>0 \end{cases}} \cup \overset{(S2)}{\begin{cases} x-3<0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}} \iff \begin{cases} x>3 \\ x^2-6x+5>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<3 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$$

Eq. associata

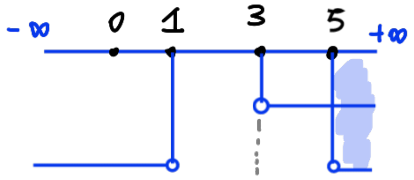
$x^2-6x+5=0$

$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4(1)(5) = 36-20 = 16>0$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\mp4}{2} \quad x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

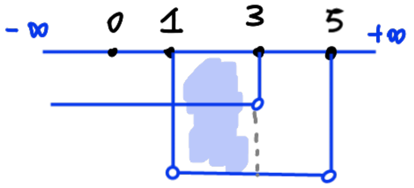
$$S1 \cup S2 \iff \begin{cases} x>3 \\ x<1 \ \vee x>5 \end{cases} \cup \begin{cases} x<3 \\ 1<x<5 \end{cases}$$

Intersezione grafica →



$x>5$

$\cup$



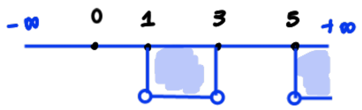
$1<x<3$

← Intersezione grafica

Unione grafica

$x>5$

$1<x<3$



$1<x<3$ $\quad x>5$

$E[f(x)] =]1,3[\cup]5,+\infty[$ (Soluzione)

~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~

Esercizio 2

$$f(x) = \sqrt{1-e^{x^2+x-6}}$$

$$E[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1-e^{x^2+x-6} \geq 0 \right\}$$

$$1-e^{x^2+x-6} \geq 0 \iff e^{x^2+x-6}-1 \leq 0 \iff e^{x^2+x-6} \leq 1 \iff x^2+x-6 \leq \overset{0}{\log 1} \iff x^2+x-6 \leq 0$$

Eq. associata

$x^2+x-6=0$

$\Delta = b^2-4ac = 1-4(1)(-6) = 1+24 = 25>0$

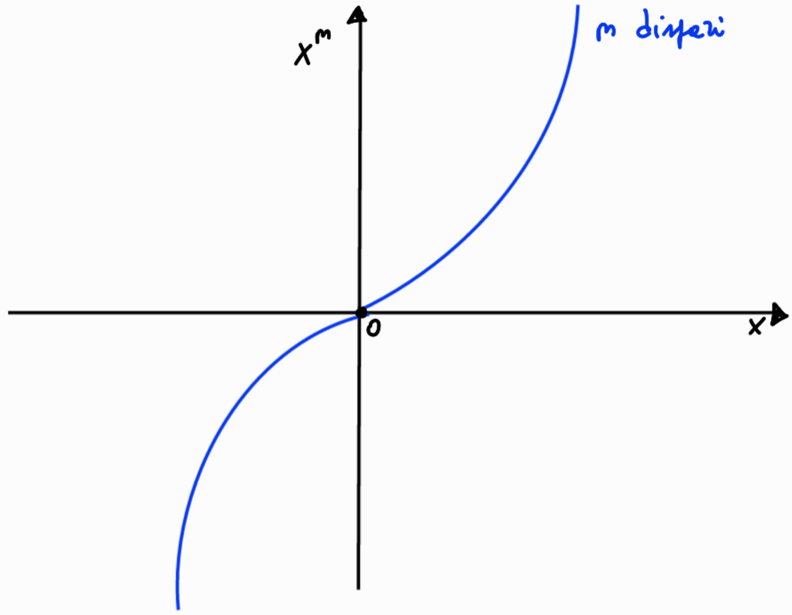
$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\mp5}{2} \quad x_1 = \frac{-6}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$x^2+x-6\le 0 \iff -3\le x\le 2$

$E[f(x)]=[-3,2]$ (Soluzione)

Prova C

Esercizio 3



Legge: $f: x\in\mathbb{R}\to f(x)=x^m\in\mathbb{R}$, m dispari

Dominio: $X=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

$\inf f(x)=-\infty$

$\sup f(x)=+\infty$

f è illimitata inferiormente e superiormente

Estremi Relativi: NO

Monotonia: f è strettamente crescente $\forall x\in X$

Funzione dispari: $f(-x)=-f(x)$

$\left.\begin{array}{l}\text{Funzione suriettiva su } \mathbb{R}\\ \text{Funzione iniettiva}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ è biunivoca $\iff f$ è invertibile

Funzione inversa: $f^{-1}(y)=\sqrt[m]{y}$

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

C.d.S. in Economia e Management

I Prova Intercorso - 30 ottobre 2023

Cognome: ____

Nome: ____

Matricola: ____

Domanda n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Risposta	A	B	B	B	A	B	B	C	B	C

1) Data una funzione $f: S \to T$, suriettiva in T, con $T =]-1, 0[$, si può affermare che

A) $\nexists \min\limits_{x \in S} f(x)$ e $\nexists \max\limits_{x \in S} f(x)$.

B) $\min\limits_{x \in S} f(x) = -1$ e $\nexists \max\limits_{x \in S} f(x)$.

C) $\nexists \min\limits_{x \in S} f(x)$ e $\max\limits_{x \in S} f(x) = 0$.

2) Data una funzione $f: S \to T$ invertibile, si può affermare che

A) la funzione è pari.

B) la funzione è biunivoca.

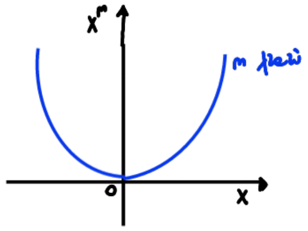
C) la funzione è limitata.

3) Data la funzione numerica definita mediante la legge $f(x) = x^n$, con n pari, si può affermare che

A) f è suriettiva su $\mathbb{R}$, ma non è iniettiva.

B) f è limitata inferiormente e illimitata superiormente.

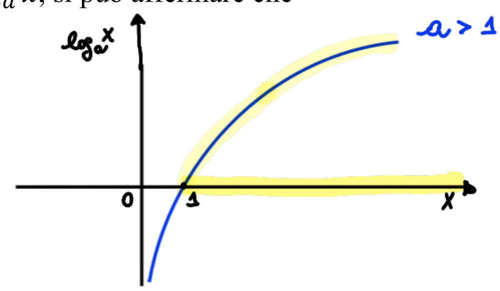
C) f è illimitata inferiormente e illimitata superiormente.



4) Dati $a > 1$ e f la funzione definita mediante la legge $f(x) = \log_a x$, si può affermare che

A) $f(x) \geq 0$ per $x \in]0, 1]$.

B) $f(x) \geq 0$ per $x \in [1, +\infty[$.



C) $f(x) \geq 0$ per $x \in]1, +\infty[$.

5) Data la funzione f definita mediante la legge

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x+5}}{|x^2-4|},$$

denominato con $E[f]$ il suo campo di esistenza, si può affermare che

A) $E[f] = \ ]-\infty, -2[\ \cup\ ]-2, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$.

B) $E[f] = \ ]-\infty, -2[\ \cup]2, +\infty[$.

C) $E[f] = [-\infty, +\infty]$.

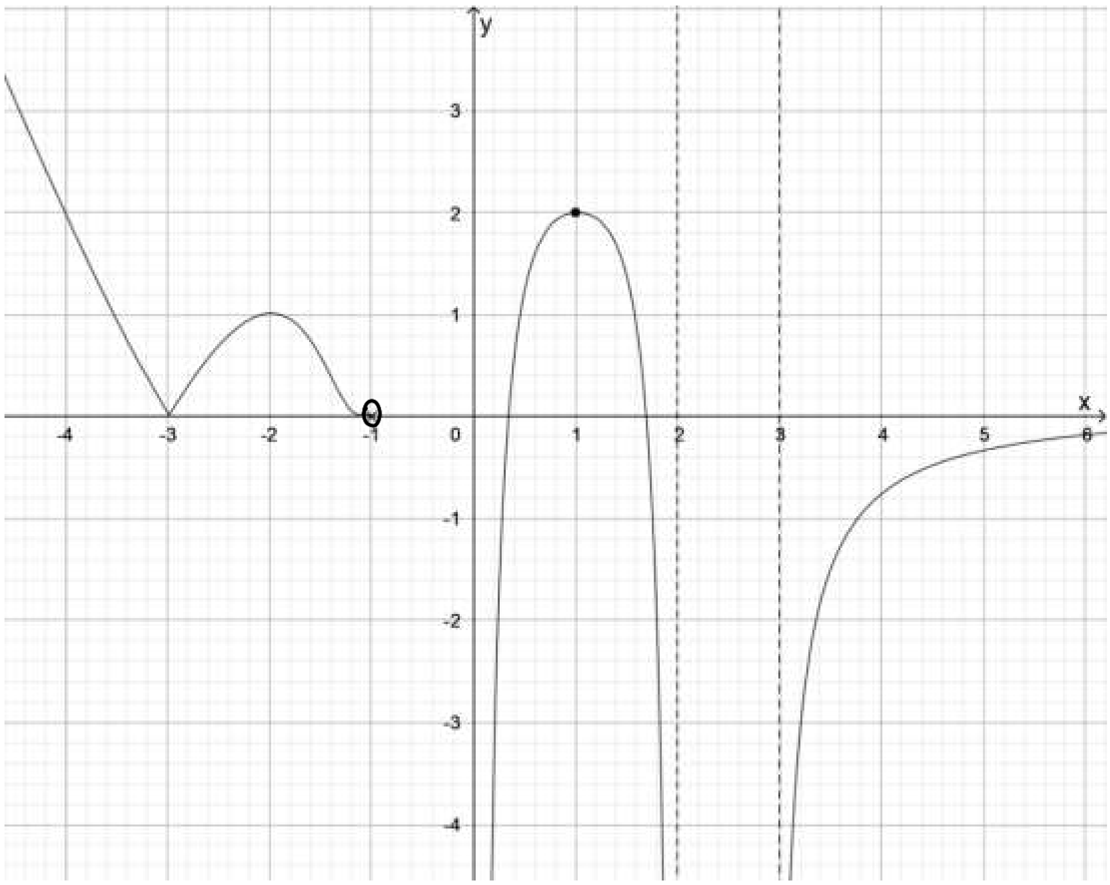
C.E.: $x^2-4 \neq 0 \iff$

$(x+2)(x-2) \neq 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x \neq -2 \qquad x \neq 2$

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



6) Denominato con X il campo di esistenza di $f(x)$ e con Y la sua immagine, si scelga una alternativa:

A) $X =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$ e $Y = \mathbb{R}$.

B) $X =]-\infty, -1[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$ e $Y = \mathbb{R}$.

C) $X =]-\infty, -1[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$ e $Y =]-\infty, 2]$.

7) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è biunivoca su $\mathbb{R}$.

B) $f(x)$ è suriettiva su $\mathbb{R}$ ma non è iniettiva.

C) $f(x)$ non è né suriettiva su $\mathbb{R}$ né iniettiva.

8) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ è illimitata inferiormente e limitata superiormente.

B) $f(x)$ è limitata inferiormente e illimitata superiormente.

C) $f(x)$ non ammette massimo assoluto.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ non ammette zeri.

B) $f(x)$ ammette più di uno zero.

C) $f(x)$ ammette un unico zero.

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f(x)$ non presenta minimi o massimi relativi.

B) $f(x) = 2$ è un massimo relativo e $x = -2$ è il punto in cui si realizza.

C) $f(x) = 2$ è un massimo relativo e $x = 1$ è il punto in cui si realizza.

ESERCIZIO 1

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}.$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 2

Sia f la funzione definita mediante la seguente legge

$$f(x) = \log(\log(5x-1)+1).$$

Determinare il campo di esistenza di f.

ESERCIZIO 3

Rappresentare graficamente la funzione elementare $f(x) = \log_a x$, con $0 < a < 1$, e descriverne le caratteristiche.

Prova D

Esercizio 1

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}$$

$$E[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0 \right\}$$

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0 \iff \underbrace{\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}}_{(S1)} \cup \underbrace{\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases}}_{(S2)} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases}$$

Eq. associata

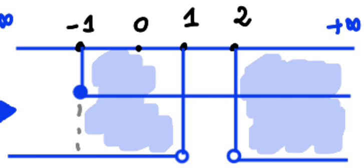
$$x^2-3x+2=0$$

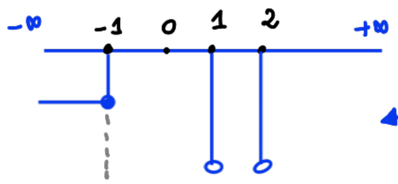
$$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9-8 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \mp 1}{2} \qquad x_1 = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$S1 \cup S2 \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x<1 \ \vee\ x>2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -1 \\ 1<x<2 \end{cases}$$

Intersezione grafica





Intersezione grafica

$$-1 \leq x < 1 \ \vee\ x > 2 \qquad \vee \qquad \emptyset$$

Poiché S2 non ha soluzione, l'unione dei due sistemi coincide con la soluzione di S1.

$$E[f(x)] = [-1, 1[\ \cup\ ]2, +\infty[$$ (Soluzione)

~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~

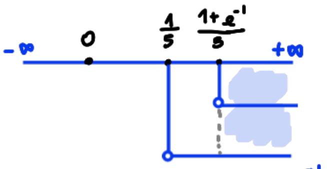
Esercizio 2

$$f(x) = \log(\log(5x-1)+1)$$

$$E[f(x)] = \{ x \in \mathbb{R} : \log(5x-1)+1>0 \}$$

$$\log(5x-1)+1>0 \iff \log(5x-1)>-1 \iff \begin{cases} 5x-1>e^{-1} \\ 5x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x>1+e^{-1} \\ 5x>1 \quad \text{(è ridondante)} \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{1+e^{-1}}{5} \simeq 0.27 \\ x > \frac{1}{5} = 0.20 \end{cases}$$

Intersezione grafica



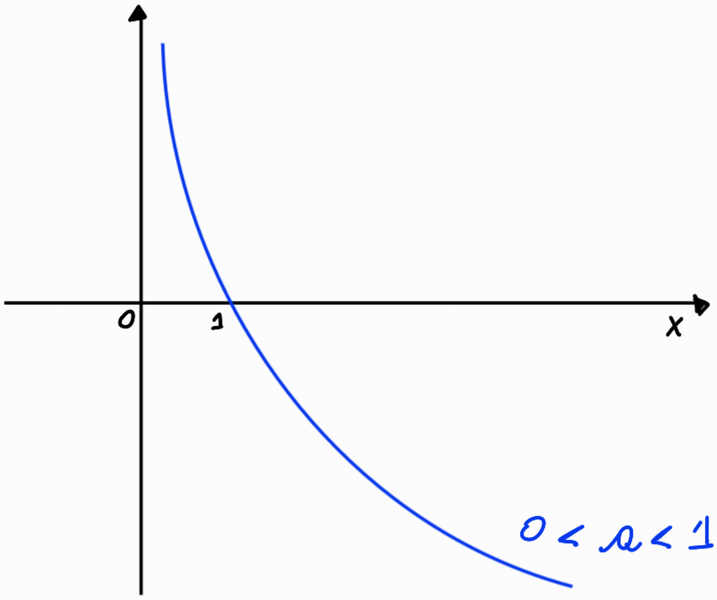
$$x > \frac{1+e^{-1}}{5}$$

$E[f(x)] = \left]\frac{1+e^{-1}}{5}, +\infty\right[$ (Soluzione)

Prova D

~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~ o ~

Esercizio 3



Legge: $f : x \in \mathbb{R}^+ \to f(x) = \log_a x \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1$

Dominio: $X = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\inf f(x) = -\infty$

$\sup f(x) = +\infty$

f è illimitata inferiormente e superiormente

Estremi Relativi: NO

Monotonia: f è strettamente decrescente $\forall x \in X$

Funzione né pari né dispari

Funzione suriettiva su $\mathbb{R}$
Funzione iniettiva

$\Rightarrow f$ è biunivoca $\Leftrightarrow f$ è invertibile

Funzione inversa: $f^{-1}(y) = a^y$