Algebra lineare

Vettori di $\mathbb{R}^n$

Definizione

Dati $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, si definisce vettore di $\mathbb{R}^n$ una n-upla di numeri $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ le cui componenti identificano le coordinate di un punto dello spazio n-dimensionale.

Operazioni

Somma

Dati due vettori $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ la loro somma $\underline{a} + \underline{b}$ identifica il vettore
$\underline{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$

Prodotto di uno scalare per un vettore

Dato un vettore $\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto $\lambda\ \underline{a}$ identifica il vettore $\underline{c} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$

Combinazione lineare di vettori

Assegnati k vettori, $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ e k scalari, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si dice **combinazione lineare** dei vettori $\underline{a}_i$, $i = 1, \ldots, k$, mediante gli scalari λ_i, $i = 1, \ldots, k$, il vettore

$$\underline{b} = \lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k .$$

Esempio

Esempio

Dati $\underline{a}_1 = (1,2,1)$, $\underline{a}_2 = (-1,0,3)$, vettori di $\mathbb{R}^3$ e $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ numeri reali, la combinazione lineare di $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ mediante gli scalari λ_1, λ_2 è

$$\underline{b} = 2 \cdot (1,2,1) - 3 \cdot (-1,0,3) = (2,4,2) + (3,0,-9) = (5,4,-7).$$

Vettori linearmente dipendenti

Definizione

k vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n,$$

si dicono **linearmente dipendenti** se esiste una loro combinazione lineare che esprime il **vettore nullo** ottenuta mediante coefficienti non tutti nulli.

Esempio

Dati $\underline{a}_1 = (3, 6, -3, 9)$, $\underline{a}_2 = (2, 4, -2, 6)$ vettori di $\mathbb{R}^4$, e $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ numeri reali, poiché $-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) =$ $(-6 + 6, -12 + 12, 6 - 6, -18 + 18) = (0, 0, 0, 0)$, $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$ sono linearmente dipendenti.

osservazione

Dalla relazione
$-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) = (0, 0, 0, 0)$ discende

$$-2\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = \underline{0}$$

ovvero

$$\underline{a}_1 = \frac{3}{2}\,\underline{a}_2, \Leftrightarrow \underline{a}_2 = \frac{2}{3}\,\underline{a}_1.$$

Osservazione

In generale, se k vettori sono linearmente dipendenti allora **i vettori corrispondenti ai coefficienti non nulli della combinazione lineare si possono esprimere in funzione degli altri.**

Vettori linearmente indipendenti

Definizione

k vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n,$$

si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti

$$\Updownarrow$$

l'unica loro combinazione lineare che esprime il vettore nullo è quella ottenuta mediante coefficienti tutti nulli.

$$\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k = \underline{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i.$$

osservazioni

1. Se k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti, allora nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.
2. Assegnati k vettori di $\mathbb{R}^n$, se $k > n$, allora i vettori sono necessariamente linearmente dipendenti.

Matrici

Definizione

Assegnati due numeri naturali m ed n, si definisce matrice di m righe ed n colonne, o matrice di dimensione $m \times n$ una tabella di $m \times n$ numeri reali disposti in m righe e n colonne.

Matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è una matrice di dimensione $m \times n$. In forma compatta, si scrive

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$$

Esempio

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- la matrice E ha dimensione 4×3
- $a_{12} = 3, \; a_{23} = 5, \; a_{41} = 3$

Matrici particolari

Una matrice di dimensione $m \times n$ si dice

- **matrice riga** o **vettore riga**, se $m = 1$;

$$A = (1, -4, 3)$$

- **matrice colonna** o **vettore colonna**, se $n = 1$;

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **matrice quadrata di ordine** m, se $m = n$;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonale di una matrice quadrata

Sia A una matrice quadrata di ordine m e generico elemento a_{ij}.

Si chiama **diagonale** (principale) di A la m-pla di numeri $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{mm})$.
Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate particolari

Sia A una matrice quadrata di ordine m e generico elemento a_{ij}. La matrice A è detta

- **matrice diagonale** $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \; \forall i \neq j$. Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **matrice identica** e si indica con $I_m \Leftrightarrow$ $a_{ij} = 0, \; \forall i \neq j, \; a_{ii} = 1, \; \forall i$. Esempio

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate particolari

- **matrice triangolare superiore** $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \ \forall i > j$. Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **matrice triangolare inferiore** $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \ \forall i < j$. Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e A di generico elemento a_{ij} una matrice $m \times n$, il prodotto $\alpha \cdot A$ identifica la matrice B di generico elemento $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Esempio

$$\alpha = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 4 \\ 8 & 2 & 10 \\ -4 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

Date due matrici $m \times n$, A e B, rispettivamente di generico elemento a_{ij} e b_{ij} la loro somma $A + B$ indetifca la matrice C di generico elemento

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i, j$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7+2 & -1-1 & 2+2 \\ 4+3 & 1+0 & 5-2 \\ -2+2 & 3+6 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

Prodotto riga per colonna

Siano A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$ di generici elementi a_{ij} e b_{ij}. Si definisce **prodotto riga per colonna** di A e B la matrice C di dimensione $m \times p$ e generico elemento

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \ \forall i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., p$$

Esempio

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 & 7 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 6 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 34 \\ 34 & 55 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine n si può associare un numero reale, denominato **determinante** di A e indicato con il simbolo det(A).

Se $n = 1$, $A = (a_{11})$,

$$det(A) = a_{11},$$

Se $n \geq 2$,

Regola di La Place.

Regola di La Place

Regola di La Place

Data una matrice **quadrata** A di ordine n, il determinante di A può essere calcolato lungo una qualsiasi linea (riga o colonna)

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} A_{ij}$$
$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} A_{ij}$$

per $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

- A_{ij} è il determinante della sottomatrice quadrata di A ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna da A
- $(-1)^{i+j} A_{ij}$ è denominato complemento algebrico dell'elemento a_{ij}.

Caso particolare $n = 2$

Se $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esempio

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$det(A) = a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3.$$

Esempio

Consideriamo la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volendo sviluppare il calcolo del determinante lungo la prima riga si ha

$$A_{11} = det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -4.$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\
&= 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) = 4 + 12 - 20 = -4
\end{aligned}
$$

Proprietà del determinante

Proprietà fondamentale del determinante

Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne), il determinante di A è nullo.

In particolare, se due righe (colonne) di A sono proporzionali, il determinante di A è nullo.

Inversa di una matrice

Definizione

Sia A una matrice **quadrata** di ordine n, si definisce matrice inversa di A e si indica con il simbolo A^{-1} la matrice di ordine n tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Osservazione

- Non tutte le matrici quadrate sono dotate di inversa.
- Se una matrice A è dotata di inversa, si dice che A è non singolare.

Non singolarità della matrice

Caratterizzazione di non singolarità

Una matrice è non singolare se e solo se ha determinante non nullo.

Determinante di matrici diagonali e triangolari

Se una matrice quadrata A è diagonale, triangolare superiore o triangolare inferiore, allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.
Sia, ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando lungo la prima riga si ha

$$\begin{aligned} det(A) &= 3 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \end{aligned}$$

Minori di una matrice

Definizione

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si dice minore di A di ordine k il **determinante** di una matrice quadrata di ordine k estratta da A.

Osservazioni

- L'ordine massimo dei minori di una matrice di dimensione $m \times n$ è pari al $\min\{m, n\}$.
- Una matrice quadrata di ordine n ha un unico minore di ordine n, dato dal suo determinante.

Rango di una matrice

Definizione

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$. Si definisce rango o caratteristica di A e si indica con $r(A)$ il massimo numero di vettori colonna (o riga) di A linearmente indipendenti.

- Il rango corrisponde all'ordine massimo dei minori di A diversi da zero.
- Se $r(A) = k$
  1. esiste un minore di ordine k diverso da zero;
  2. ogni minore di A di ordine maggiore o uguale a $k + 1$ è nullo.

Esempio

Calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 8,$$

quindi $r(A) = 3$.

Esempio

Calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$det(A) = 0,$$

questo implica $r(A) < 3$.

$$det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4.$$

Quindi $r(A) = 2$.

Esempio

Calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -8,$$

quindi r(A)$=$ 2.

Osservazione

Per verificare se k vettori sono linearmente indipendenti, basta considerare la matrice avente i vettori dati come colonne (o righe) e controllare se la matrice ha rango k.

In particolare, n vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se la matrice A di ordine n formata da essi ha determinante diverso da zero.

Esempio

Verifichiamo se i vettori

$$\underline{a}_1 = (2 \;\; 2 \;\; 1), \;\; \underline{a}_2 = (1 \;\; 2 \;\; 3), \;\; \underline{a}_3 = (3 \;\; 2 \;\; 1),$$

sono linearmente indipendenti.
Calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che $r(A) \leq 3$. Calcoliamo $det(A)$, l'unico minore di A di ordine 3.

$$det(A) = 4,$$

$$\Downarrow$$

$r(A) = 3 \Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti.

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si rappresenta nel modo seguente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & \cdots & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdots & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

- a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ **coefficienti** del sistema;
- $b_1, ..., b_m$ **temini noti** del sistema;
- $x_1, ..., x_n$ **incognite** del sistema.

Un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & \cdots & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdots & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

si può esprimere in forma compatta

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

dove A è la matrice dei coefficienti del sistema, $\underline{x}$ è il vettore delle incognite, $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti.

Esempio

Il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{cases}$$

espresso in forma scalare, si esprime, in forma matriciale, nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice completa di un sistema

Detta A la matrice dei coefficienti di un sistema lineare di ordine $m \times n$, si chiama **matrice completa** del sistema lineare la matrice

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) = (A|b)$$

di ordine $m \times (n+1)$.

Caratterizzazione dei sistemi lineari

Un sistema lineare può avere

- una sola soluzione, il sistema si dice **compatibile determinato**;
- infinite soluzioni, il sistema si dice **compatibile e indeterminato**;
- nessuna soluzione, il sistema si dice **incompatibile**.

Teorema di Rouchè-Capelli

Teorema di Rouchè-Capelli

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è **compatibile** $\Leftrightarrow r(A) = r(A_b)$.

Inoltre

- $r(A) \neq r(A_b) \Leftrightarrow$ il sistema non ammette soluzioni,
- $r(A) = r(A_b) < n \Leftrightarrow$ il sistema ammette infinite soluzioni,
- $r(A) = r(A_b) = n \Leftrightarrow$ il sistema ammette una sola soluzione.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa A_b è di ordine 3.
$det(A_b) = 2 \Rightarrow r(A_b) = 3 \Rightarrow$ il sistema è **incompatibile.**

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa A_b è di ordine 3. $det(A_b) = 0 \Rightarrow r(A_b) < 3$
$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow r(A) = r(A_b) = 2 \Rightarrow$ il sistema è **compatibile.**

Nel seguito, ci limitiamo a considerare sistemi quadrati, ossia sistemi in cui il numero di equazioni coincide col numero delle incognite.

Metodo di eliminazione di Gauss

Dato un sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

il metodo di eliminazione di Gauss trasforma il sistema dato in un sistema **equivalente**

$$R\underline{x} = \underline{c}$$

avente matrice dei coefficienti R **triangolare superiore**.

Metodo di eliminazione di Gauss

Il Metodo di eliminazione di Gauss procede per passi successivi.
Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Al I passo si considera la matrice completa del sistema, A_b, e si procede con l'obiettivo di rendere nulli tutti gli elementi della I colonna che si trovano al di sotto della diagonale principale.

Metodo di eliminazione di Gauss

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sottraendo

1. alla II riga la I,
2. alla III riga la I moltiplicata per 2 $\left(2 = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$,

si ottiene

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ (1-1) & (-1-1) & (-1-1) & (2-2) \\ (2-2) & (-1-2) & (1-2) & (6-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Al II passo si considera la matrice ottenuta al passo precedente e si procede con l'obiettivo di rendere nulli tutti gli elementi della II colonna che si trovano al di sotto della diagonale principale.

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sottraendo alla III riga la II moltiplicata per $\frac{3}{2}$ $\left(\frac{3}{2} = \frac{a_{32}}{a_{22}}\right)$, si ottiene

$$A_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & (-3 + \frac{3}{2} \cdot 2) & (-1 + \frac{3}{2} \cdot 2) & (2 - \frac{3}{2} \cdot 0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Alla fine del II passo si ha il sistema triangolare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 2 \end{cases}$$

equivalente al sistema di partenza, da cui si ricava

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{2 \cdot 1}{-2} = -1 \\ x_1 = (2 + 1 - 1) = 2 \end{cases}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 8 \end{cases}$$

Al I passo si considera la matrice completa del sistema, A_b, e si procede con l'obiettivo di rendere nulli tutti gli elementi della I colonna che si trovano al di sotto della diagonale principale.

Metodo di eliminazione di Gauss

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Sottraendo

1. alla II riga la I moltiplicata per 2 $\left(2 = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$,
2. alla III riga la I,

si ottiene

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ (2-2) & (3+2) & (-2+2) & (11-6) \\ (1-1) & (4+1) & (-1+1) & (8-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Al II passo si considera la matrice ottenuta al passo precedente e si procede con l'obiettivo di rendere nulli tutti gli elementi della II colonna che si trovano al di sotto della diagonale principale.

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Poiché questa ha due righe uguali fra loro, si ottiene

$$A_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Alla fine del II passo si ha il seguente sistema triangolare

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & & 5x_2 & & & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

equivalente al sistema di partenza, da cui si ricava

$$\begin{cases} x_3 & = & t \\ x_2 & = & 1 \\ x_1 & = & t+4 \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni $\underline{x} = \begin{pmatrix} t+4 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \; \forall t \in \mathbb{R}.$

Metodo di eliminazione di Gauss

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Al I passo si considera la matrice completa del sistema, A_b, e si procede con l'obiettivo di rendere nulli tutti gli elementi della I colonna che si trovano al di sotto della diagonale principale.

Metodo di eliminazione di Gauss

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sottraendo

1. alla II riga la I moltiplicata per 2 $\left(2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$,
2. alla III riga la I moltiplicata per 3 $\left(3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$,

si ottiene

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ (2-2) & (1-4) & (2-8) & (1-6) \\ (3-3) & (2-6) & (4-12) & (2-9) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Al II passo si considera la matrice ottenuta al passo precedente e si procede con l'obiettivo di rendere nulli tutti gli elementi della II colonna che si trovano al di sotto della diagonale principale.

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Sottraendo alla III riga la II moltiplicata per $\frac{4}{3}$ $\left(\frac{4}{3} = \frac{a_{32}}{a_{22}}\right)$ si ottiene

$$A_b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & (-4 + \frac{4}{3} \cdot 3) & (-8 + \frac{4}{3} \cdot 6) & (-7 + \frac{4}{3} \cdot 5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Alla fine del II passo si ha il sistema triangolare

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -5 \\ & & & & 0 & = & -\frac{1}{3} \end{cases}$$

equivalente al sistema di partenza. Tale sistema ovviamente non ammette soluzioni.

Dato un sistema lineare $R\underline{x} = \underline{c}$ con R matrice triangolare superiore,

1. se tutti gli elementi della diagonale principale di R sono diversi da zero il sistema è **compatibile e determinato** . Il sistema può essere risolto con il metodo di sostituzione all'indietro;
2. se almeno un elemento diagonale è nullo il sistema è **incompatibile** o **compatibile ed indeterminato**.
   - Se tutti gli elementi del vettore dei termini noti corrispondenti agli elementi nulli della diagonale principale sono nulli, il sistema è **compatibile ed indeterminato**;
   - se almeno uno degli elementi del vettore dei termini noti corrispondenti agli elementi nulli della diagonale principale è non nullo, il sistema è **incompatibile**.