Algebra Lineare

Parte 1

Definizione di vettore

Sia $n \in \mathbb{N}$ (numero naturale) e $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ (prodotto cartesiano).

Si definisce vettore di $\mathbb{R}^n$ (o vettore di di dimensione n) un insieme ordinato di n numeri reali del tipo:

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{, dove:}$$

("a vettore" oppure "a sottosegnato")

$$a_i \in \mathbb{R} \qquad \forall \; i = 1, \ldots, n.$$

"per ogni"

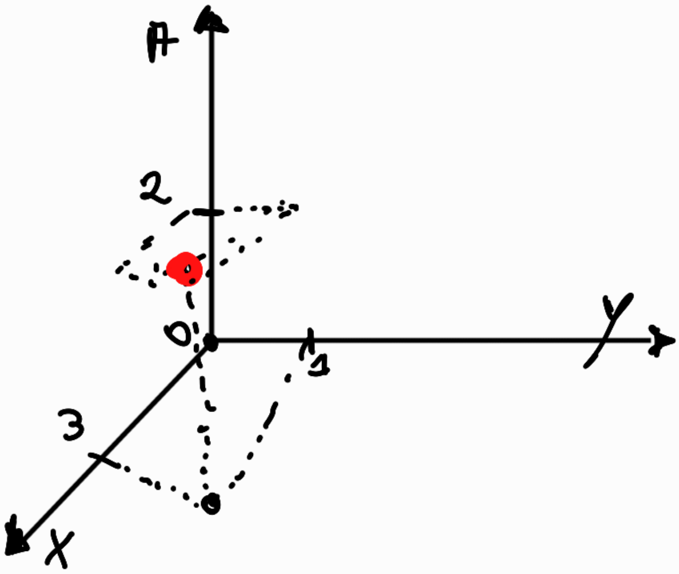
Esempi

- $n = 2 \Rightarrow$ Il vettore è una coppia di numeri (reali)

$$\underline{a} = (a_1, a_2) = (-3, 1) \in \mathbb{R}^2$$ (graficamente è un punto del piano)

- $n = 3 \Rightarrow$ Il vettore è una terna di numeri

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) = (3, 1, +2) \in \mathbb{R}^3$$ (graficamente è un punto dello spazio)



- $n = 4 \Rightarrow$ Il vettore è una quaterna di numeri

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, -1, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$$ (no interpret. geometrica) $n > 3$

- Per n generico $\Rightarrow$ Il vettore è ennupla, o n-pla, di numeri.

- $n = 1 \Rightarrow$ Il vettore si riduce ad uno "scalare" che altro non è che un numero reale.

$$\underline{a} = (a_1) = (a) = a = -3 \in \mathbb{R}$$ (numero reale)

NOTA

Uno scalare si chiama anche coefficiente.

Prodotto di uno scalare per un vettore

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare (coefficiente) (numero reale) e $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ un vettore $\in \mathbb{R}^n$.

Il prodotto $\alpha \cdot \underline{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$= (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

restituisce un nuovo vettore di dimensione n dove ciascuna componente è il prodotto tra lo scalare e la componente corrispondente del vettore dato.

Esempio

- $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\underline{a} = (-1, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \cdot (-1, 4, 2) = \left(\frac{-1}{2}, 2, 1\right) \in \mathbb{R}^3$$

- $\alpha = -3$ e $\underline{a} = \left(-5, \frac{1}{9}\right) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha \cdot \underline{a} = -3 \cdot \left(-5, \frac{1}{9}\right) = \left(15, \frac{-1}{3}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$= \left((-3)(-5), (\cancel{-3}^{\,1})\left(\frac{1}{\cancel{9}_{\,3}}\right)\right) = \left(15, -\frac{1}{3}\right)$$

Somma tra vettori (entrambi della stessa dimensione)

Siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

La somma:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) =$$
$$= (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m) \in \mathbb{R}^m$$

restituisce un nuovo vettore di dimensione m, dove ciascuna componente è somma delle corrispondenti componenti dei vettori dati.

Esempio

$\underline{a} = (-1, 3, 4)$, $\underline{b} = (\frac{1}{2}, -5, 1) \in \mathbb{R}^3$.

$$\underline{a} + \underline{b} = (\underbrace{-1+\tfrac{1}{2}}_{\frac{-2+1}{2}}, 3-5, 4+1) = (-\tfrac{1}{2}, -2, 5) \in \mathbb{R}^3.$$

Combinazione lineare di vettori (della stessa dimensione)

→ Prodotto scalare - vettore
→ Somma tra due vettori.

Siano $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_K \in \mathbb{R}^m$ (K vettori di $\mathbb{R}^m$)

e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R}$ (K scalari di $\mathbb{R}$).

Si definisce combinazione lineare dei K vettori, una combinazione del tipo:

$$\underline{c} = \underbrace{\alpha_1 \cdot \underline{a}_1}_{\text{prodotto scalare vettore } \in \mathbb{R}^m} + \underbrace{\alpha_2 \cdot \underline{a}_2}_{\in \mathbb{R}^m} + \dots + \underbrace{\alpha_K \cdot \underline{a}_K}_{\in \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^m$$

$$\boxed{\underline{c} = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \underline{a}_i}$$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

$$3x^4 + 5x^2 + 7x + 1$$

Esempio

$K = 2$ vettori

$m = 3$ (n. componenti di ciascun vettore)

$\underline{a}_1 = (-1, 2, 3)$ $\underline{a}_2 = (5, 4, 8)$

$\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$

Combin. lineare di $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$.

$$\underline{c} = \alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 =$$

$$= 2(-1, 2, 3) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)(5, 4, 8)}_{} =$$

$$= (-2, 4, 6) + \left(-\frac{5}{2}, -2, -4\right) =$$

$$= \left(\underbrace{-2-\frac{5}{2}}_{\frac{-4-5}{2}}, 4-2, 6-4 \right) =$$

$$= \left(-\frac{9}{2}, 2, 2\right)$$

Esempio

$k = 3$

$m = 2$

$\underline{a}_1 = (-3, 1)$, $\underline{a}_2 = (0, 1)$, $\underline{a}_3 = (5, -2)$

$\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 0$

Combin. lineare

$$\underline{c} = \alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \alpha_3 \cdot \underline{a}_3$$

$$= (-1)(-3, 1) + (3)(0, 1) + (0)(5, -2) =$$

$$= (3, -1) + (0, 3) + \underbrace{(0, 0)}_{\text{(vettore nullo di dim 2)}}$$

$$= (3+0+0, -1+3+0) = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$$

Vettore nullo di $\mathbb{R}^m$

Il vettore nullo di $\mathbb{R}^m$ è un vettore che si denota con $\underline{0}$ (si legge vettore nullo o zero sottosegnato) ed è un vettore avente tutte componenti uguali a zero.

Esempio

- $m = 1 \Rightarrow \underline{0} = 0 \in \mathbb{R}$
- $m = 2 \Rightarrow \underline{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ (origine degli assi cartesiani nel piano)
- $m = 3 \Rightarrow \underline{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (origine dei 3 assi in uno spazio)
- $m > 3 \Rightarrow \underline{0} = \underbrace{(0,0,\dots,0)}_{m \text{ volte}}$

Test

1) Calcolo limite ★
2) Domanda su derivata
3) Domanda su derivate
4) Calcolo di derivata
5) T. degli zeri
6) Grafico con domande
7) // ↑
8) // ↑

Algebra

9) Combin. lineare
10) Calcolo del rango di una matrice / verifica se dei vettori sono indipendenti o meno ?

- 1 domanda sui limiti
- 1 su $f'(x)$ e $f''(x)$
- 1 domanda su applicazione del T. zeri o di Weierstrass

Esercizio

1 SOLO ESERCIZIO

Funzione

1) Dominio $\mathbb{R}$

2) Limiti agli estremi

3) Ricerca di estremi relativi e assoluti.