Sistemi lineari incompatibili e indeterminati

• **Sistema Indeterminato** (con infinite soluzioni)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$r_2^* = r_2 - 2 \cdot r_1$$

$$r_3^* = r_3 - 1 \cdot r_1 = r_3 - r_1$$

$$A_b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 - \underbrace{2(1)}_{-2} & 3 - \underbrace{2(-1)}_{+2} & -2 - \underbrace{2(-1)}_{+2} & 11 - \underbrace{2(3)}_{-6} \\ 1 - \underbrace{(1)}_{-1} & 4 - \underbrace{(-1)}_{+1} & -1 - \underbrace{(-1)}_{+1} & 8 - \underbrace{(3)}_{-3} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad r_3^{**} = r_3^* - r_2^*$$

$$A_b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{0-0} & \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{5-5} & \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{0-0} & \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{5-5} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema indeterminato}$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = \frac{0}{0}$$

$$\boxed{\underbrace{0 \cdot x_3}_{\shortparallel\ 0} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{0}}$$

$$0 = 0$$

$$2x_3 = 2$$

$$x_3 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_2 = 5 \\ 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_2 = 5 \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(t è un parametro)

Esempio

$$5x_2 - x_3 = 5$$

$$x_2 = \frac{5 + x_3}{5} = \frac{5+t}{5}$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = \frac{5}{5} = 1 \\ x_1 = x_2 + x_3 + 3 = 1 + t + 3 = \underline{t + 4} \end{cases}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (t+4,\ 1,\ t)^T \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}.$$

Al variare di t in $\mathbb{R}$, il vettore $\underline{x}$ cambia:

- $\underline{t=0} \Rightarrow \underline{x} = (4, 1, 0)^T$
- $t = 1 \Rightarrow \underline{x} = (5, 1, 1)^T$
- $t = -2 \Rightarrow \underline{x} = (2, 1, -2)^T$

Verifica

Se $t = 0 \Rightarrow \underline{x} = (4, 1, 0)^T$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - 1 - 0 = 3 \\ 2(4) + 3(1) - 2 \cdot 0 = 11 \\ 4 + 4(1) - 0 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 3 \ \checkmark \\ 8 + 3 = 11 \ \checkmark \\ 8 = 8 \ \checkmark \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = 3 \\ 11 = 11 \end{cases}$$

Sistema incompatibile

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$r_2^* = r_2 - 2 \cdot r_1$$

$$r_3^* = r_3 - 3 \cdot r_1$$

$a_{21} = 0 \Rightarrow 2 - k_1 \cdot 1 = 0 \iff 2 - k_1 = 0 \iff k_1 - 2 = 0 \iff k_1 = 2$

$a_{31} = 0 \Rightarrow 3 - k_2\, 1 = 0 \iff 3 - k_2 = 0 \iff k_2 - 3 = 0 \iff k_2 = 3$

$$A_b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 - 2(1) & 1 - 2(2) & 2 - 2(4) & 1 - 2(3) \\ 3 - 3(1) & 2 - 3(2) & 4 - 3(4) & 2 - 3(3) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

$$a_{32}=0 \Rightarrow -4 - K\cdot(-3) = 0 \Leftrightarrow -4+3K=0$$

$$3K-4=0 \Leftrightarrow 3K=4 \Leftrightarrow K=\frac{4}{3}$$

$$\boxed{R_3^{**} = R_3^{*} - \frac{4}{3} R_2^{*}}$$

$$A_b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0-\frac{4}{3}(0) & -4-\frac{4}{\cancel{3}}(\cancel{-3}) & -8-\frac{4}{\cancel{3}_{1}}(\cancel{-6}^{2}) & -7-\frac{4}{3}(-5) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7+\frac{20}{3} \end{array}\right) =$$

$-4-4(-1)$

$-4+4$

$\parallel$

0

$-8-4(-2)$

$-8+8$

$\to -\frac{1}{3}$

QUESTO SISTEMA È INCOMPATIBILE

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Determinato o incompatibile ?

A (tutti zero)

b (ultimo elemento diverso da zero)

$$0 \cdot X_3 = -\frac{1}{3}$$ (eq. I grado)

$$X_3 = \frac{-\frac{1}{3}}{0}$$ → Non è definito

$$0 = -\frac{1}{3}$$ (IMPOSSIBILE) NON È UN'IDENTITÀ

Tutto il sistema è impossibile perchè è incompatibile.

NOTA BENE

$a_{33} \neq 0$ e $a_{34} = 0$ (il sistema continua ad essere determinato)

$$A_b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$a x = b \qquad x = \frac{b}{a} \quad a \neq 0$$

$$\cancel{a}\, x = \frac{b}{\cancel{a}} \quad \text{(eq. I grado)}$$

$\cancel{b \neq 0}$

$a \neq 0$

$$x = \frac{b}{a}$$

$$7 \cdot x_3 = 0 \quad \text{(eq. I grado)}$$

$$x_3 = \frac{0}{7}$$

$$\underset{a}{7} \cdot x_3 = \underset{b}{0} \iff \frac{\cancel{7} x_3}{\cancel{7}} = \frac{0}{7} \iff x_3 = \frac{0}{7} = 0$$

$7 x_3 = 0$ dove: $a = 7 \neq 0$, $b = 0$ — esiste un'unica soluzione dell'eq. $7x_3 = 0$

$$A_b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

CASI

1) $a_{33} \neq 0$ e $b_3 \neq 0 \Rightarrow$ Sistema determinato

2) $a_{33} = 0$ e $b_3 = 0 \Rightarrow$ Ultima riga contiene tutti zero $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sistema indeterminato

3) $a_{33} = 0$ e $b_3 \neq 0 \Rightarrow$ Sistema è incompatibile

perché?

$$0 \cdot x_3 = b_3 \iff x_3 = \frac{b_3}{0}$$

(IMPOSSIBILE) perché 0 sta al denominatore

4) $\underline{a_{33} \neq 0}$ e $b_3 = 0 \Rightarrow$ Sistema determinato

perché ?

$$a_{33} \cdot x_3 = 0 \iff x_3 = \frac{0}{a_{33}} = 0$$

(UNICA SOLUZIONE)