# Sistemi lineari e Metodo di Gauss

## Sistema lineare (*)

Un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $\cdot x$ | $x_1$ |
| $\cdot y$ | $x_2$ |
| $\cdot A$ | $x_3$ |
| $W$ | $x$ |

dove:

- $a_{ij}$, con $i = 1, \dots, m$ (indice di riga) e $j = 1, \dots, n$ (indice di colonna), sono detti coefficienti del sistema;
- $b_1, \dots, b_m$ sono detti termini noti (ossia non moltiplicano nessuna variabile); [ne ho uno per ogni equazione]
- $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite (o variabili) del sistema (gli elementi di cui vogliamo determinare il valore).

Esempio

- $m = 2$ equazioni e $n = 3$ variabili $(x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\ ; \\ 5x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 4x_3 = 7\ ; \end{cases}$$

$b_1$

$b_2 = 7$

$a_{11} = 3$ $\quad a_{12} = 2$ $\quad a_{13} = 1$

$a_{21} = 5$ $\quad a_{22} = -\frac{1}{2}$ $\quad a_{23} = 4$

- $m = n = 2 \Rightarrow$ Il sistema lineare si dice <u>quadrato</u>.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ \frac{1}{3}x_1 + 7x_2 = -3 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $3 = a_{11}$ | $\frac{1}{3} = a_{21}$ |
| $-2 = a_{12}$ | $7 = a_{22}$ |
| $5 = b_1$ | $-3 = b_2$ |

- La rappresentazione del sistema in (*) è detta rappresentazione del sistema in <u>forma scalare</u> o <u>forma estesa</u>.

- Una rappresentazione del sistema lineare alternativa a quella in (*) è la rappresentazione in <u>forma matriciale</u> o <u>forma compatta</u>, ovvero:

$$\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}\ , \text{ dove:}$$

$A$: $(m \times n)$, $\underline{x}$: $(n \times 1)$, $\underline{b}$: $(m \times 1)$

$$\begin{array}{c} 1 : \\ 2 : \\ 3 : \\ \vdots \\ m : \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $A$ è la matrice dei coefficienti $a_{ij}$.
- $\underline{x}$ è il vettore delle incognite ($\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$).

  di dim. $n$ — vettore colonna

- $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti ($\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$).

  di dim. $m$ — vettore colonna

Esempio ($m = 2$ e $n = 3$) $x_1$ $x_2$ $x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

(Sistema in forma scalare o estesa)

$$\Downarrow$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

(Sistema in forma matriciale o compatta)

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$ $(2 \times 3)$

- $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)^T$

- $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = (1, 7)^T$

oppure

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$(2 \times 3)$ $\quad$ $(3 \times 1)$ $\quad$ $(2 \times 1)$

**Definizione**

Si definisce matrice completa (di un sistema lineare) la matrice dei coefficienti corredata dal vettore dei termini noti:

$$A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

$$(m \times (n+1))$$

**Esempio**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Matrice completa: $A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 & 7 \end{array}\right)$

(2 X 4)

# Soluzioni di un sistema lineare

Dato il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, esso può avere:

- nessuna soluzione ⇒ sistema incompatibile
- una soluzione ⇒ sistema compatibile e determinato
- infinite soluzione ⇒ sistema compatibile e indeterminato

La soluzione, se esiste, è data dal vettore $\underline{x} = A\backslash\underline{b}$.

## Teorema di Rouchè - Capelli

Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ è compatibile (ovvero ammette soluzioni) $\iff$ (se e solo se) $r(A) = r(A_b)$ (il rango della matrice A dei coefficienti è uguale al rango della matrice $A_b$ completa)

Inoltre:

- $r(A) \neq r(A_b) \iff$ il sistema è incompatibile
- $r(A) = r(A_b) \iff$ il sistema è compatibile e:
  - $r(A) = r(A_b) < n \iff$ sistema indeterminato

• $r(A) = r(A_b) = n \Leftrightarrow$ sistema determinato.

## Metodo di eliminazione di Gauss

Dato il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, il metodo di eliminazione di Gauss (o metodo di Gauss) è un metodo di risoluzione di sistemi lineari di equazioni che consiste nel trasformare il sistema di partenza $A\underline{x} = \underline{b}$ in un sistema equivalente (ossia avente lo stesso vettore delle soluzioni) e dove la matrice dei coefficienti è una matrice triangolare superiore.

Esempio di matrice triang. superiore

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Metodo di Gauss: $\boxed{A\underline{x} = \underline{b}}$ Sistema di partenza

$$\Downarrow$$

$\boxed{R\underline{x} = \underline{c}}$ Sistema di arrivo

dove:

• $R$ è una matrice triangolare superiore.

Vantaggio: dopo la trasformazione, la risoluzione del sistema è immediata.

# Applicazione del metodo di Gauss

Focus solo su sistemi quadrati $\Rightarrow m = n$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$m = n =$

1° Passo

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

1° passo $\rightarrow$ 1° riga $\rightarrow$ 1° colonna

l'elemento $a_{11} = 1$ si chiama elemento pivot della riga pivot.

L'obiettivo è annullare nella 1° colonna tutti i coefficienti sotto l'elemento pivot.

$$2 - k \cdot 1 = 0$$

$$r_2^* = r_2 - r_1$$

$$r_3^* = r_3 - k \cdot r_1 = r_3 - 2r_1$$

$$A_b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1-1 & -1-1 & -1-1 & 2-2 \\ 2-\underbrace{2(1)}_{-2} & -1-\underbrace{2(1)}_{-2} & 1-\underbrace{2(1)}_{-2} & 6-\underbrace{2(2)}_{-4} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$\underline{a} = (1, 3, 2)$

$\underline{b} = (4, 5, -6)$

$\underline{a} + \underline{b} = (1+4, 3+5, 2-6)$

$r_1 = (1, 1, 1, 2)$

$r_2 = (1, -1, -1, 2)$

$r_2 - r_1 = (1-1, -1-1, -1-1, 2-2)$

---

$$A_b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{r_3^* - \frac{3}{2} r_2^*}$$

2° Passo → 2ª riga → 2ª colonna → Elemento Pivot

$r_3^{**} = r_3^* - K \cdot r_2^*$

Come scelgo K?

$(-3) - K \cdot (-2) = 0$

$-3 + 2K = 0 \iff 2K = 3 \iff$

$r_3^{**} = r_3^* - \frac{3}{2} r_2^*$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$A_b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0-\frac{3}{2}\cdot 0 & (-3)-\frac{3}{\cancel{2}}(-\cancel{2}) & -1-\frac{3}{\cancel{2}}(-\cancel{2}) & 2-\cancel{\frac{3}{2}\cdot(0)} \end{array}\right) =$$

$-3+3$ $\quad -1+3 \quad 2-3$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$2x_3 = 2$

$x_3 = \frac{2}{2} = 1$

Sistema compatibile e determinato

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 2 \\ \cancel{0 x_1} - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \cancel{0 x_1} + \cancel{0 x_2} + 2x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \frac{\cancel{2}x_3}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 1 \\ \boxed{x_2 + x_3 = 0} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -x_3 = -(1) = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - (-1) - (1) = 2 + \cancel{1} - \cancel{1} = 2$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, -1, 1)^T = (2, -1, 1)' \in \mathbb{R}^3.$$

Sistema compatibile e determinato.