Vettori linearmente dipendenti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2×2

$$\boxed{x_2 = 3 \cdot x_1}$$

$x_1 \in \mathbb{R}^2$

$x_2 \in \mathbb{R}^3$

$x_1 = (1, 2)$

$x_2 = (3, 6)$

$$x_1 = \frac{1}{3} x_2$$

$\det(A) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 =$

$= 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ singolare (non invertibile)

Definizione

K vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti (l. d.) se esiste una loro combinazione lineare che restituisce il vettore nullo, con almeno un coefficiente della combinazione diverso da zero:

$$\boxed{\alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \alpha_K \underline{a}_K = \underline{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n} \in \mathbb{R}^n}$$

e $\exists\, \alpha_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, K)$.

Esempio

$\underline{a}_1 = x_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$

$\underline{a}_2 = x_2 = (3, 6) \in \mathbb{R}^2$

Combin. line. di $\underline{e}_1$ e $\underline{e}_2$:

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot \underline{e}_1} + \underbrace{\alpha_2 \cdot \underline{e}_2} = \underline{0} = \underbrace{(0,0)} \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha_1 \cdot (1,2) + \alpha_2 (3,6) = \underline{(0,0)}$$

$$\alpha_1 = (3) \qquad \alpha_2 = (-1)$$

$$3 \cdot (1,2) + (-1)(3,6) =$$

$$(3,6) + (-3,-6) =$$

$$(3-3, 6-6) = (0,0)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 7 - 2(-3) = 7 + 6 = 11 \neq 0 \Rightarrow \underline{A \text{ non singolare}}$$

$$\underline{a}_1 = r_1 = (1,2)$$

$$\underline{a}_2 = r_2 = (-3,7)$$

Comb. lin.

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{v}_2 = \underline{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2 \; ?$$

$$\alpha_1 (1, 2) + \alpha_2 (-3, 7) = (0, 0)$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$0 \cdot (1, 2) + 0 (-3, 7) =$$

$$(0, 0) + (0, 0) = (0, 0)$$

Definizione

K vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti (l. i.) se l'unica loro combinazione lineare che restituisce il vettore nullo è quella che si ottiene con tutti scalari (o coefficienti) uguali a zero:

$$\underbrace{\alpha_1}_{=0} \cdot \underline{v}_1 + \underbrace{\alpha_2}_{=0} \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \underbrace{\alpha_K}_{=0} \cdot \underline{v}_K = \underline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

dove $\alpha_i = 0$ (sempre) $(\forall i = 1, \ldots, K)$

Esempio

$\underline{a}_1 = (1, 2, 3) \cdot$

$\underline{a}_2 = (1, 4, -2) \cdot 2$

$\underline{a}_3 = (1+2(1), 2+2(4), 3+\underbrace{2(-2)}_{-4}) = (3, 10, -1)$

3 vettori linearmente dipendenti

$\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + 2\,\underline{a}_2$

$\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 = \underline{a}_3$

$1 \cdot \underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 - \underline{a}_3 = \underline{0}$

$d_1 = 1$

$d_2 = 2$

$d_3 = -1$

$X = 1 \iff X - 1 =$

eq. I grado

$X = 1$

$X - 1 = \underbrace{1 - 1}$

$X - 1 = 0$

$X = 1$

$x - 1 = 0$

$X - 2 = 0 \iff x = 2 \iff x - 2 = 0$

Rango di una matrice

è un numero naturale associato ad una matrice

Definizione 1

Data una matrice A, di dimensione $m \times n$ (non necessariamente quadrata), si definisce rango di una matrice il massimo numero di vettori riga (o equivalentemente colonne) linearmente indipendenti.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

1° vettore $(1, 2)$ e 2° vettore $(-3, 7)$ indip. linear.

Rango della matrice è 2.

Definizione 2

Data una matrice A, di dimensione $m \times n$, il rango di una matrice è l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate estraibili da A non singolari (ossia con determinante non nullo).

Notazione di rango

Rango della matrice A: $\underbrace{r(A)}_{\text{più diffusa}}$ oppure $rg(A)$.

Range del rango

Il rango di una matrice è un numero naturale ($r(A) \in \mathbb{N}$) compreso tra:

$$\boxed{1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}}$$

$$r(A) \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

... ?

valore minimo tra m ed n:

$\min\{m, n\}$ (il numero più piccolo tra il numero di righe e il numero di colonne)

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2×3

matrice rettangolare

$m = 2$

$n = 3$

$$\min\{m, n\} = \min\{2, 3\} = 2$$

Range del rango:

$$1 \leq r(A) \leq 2 \iff r(A) \in \{1, 2\}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 7 \\ 2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad m = 4 \qquad n = 3$$

4×3

$$\min\{m, n\} = \underline{\min\{4, 3\} = 3}$$

$$1 \leq r(A) \leq 3 \iff r(A) \in \{1, 2, \underset{\text{max}}{3}\}$$

Calcolo del rango

$\Rightarrow$ (Utilizzare la definizione 2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3

$$1 \leq r(A) \leq \underset{\min\{2,3\}}{\overset{\shortparallel}{2}} \iff r(A) \in \{1, 2\}$$

- 1° Step: verifico che il rango sia $\underline{2}$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - \cancel{1 \cdot 0} = \underbrace{2 \neq 0}_{\det(\text{sottomatrice})}$$

Sottomatrice di ordine 2 non singolare

Conclusione: il rango di A è 2: $r(A) = 2$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3×4

$$1 \leq r(A) \leq \underset{\underset{\min\{3,4\}}{\shortparallel}}{3} \iff r(A) \in \{1, 2, 3\}$$

- **1° Step**: verifichiamo che $r(A) = 3$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\left[1 \cdot 1 - \cancel{4 \cdot 0}\right] =$$

$3X3$

$$= 2 \cdot 1 = \underbrace{2 \neq 0}_{\det(\text{sottom.})}$$

Conclusione: $r(A) = 3$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{riga } 1 \\ \text{riga } 2 \end{array}$$

2×3

due vettori lin. indip.

$1 \leq r(A) \leq 2 \iff r(A) \in \{1, 2\}$

• Verificare se $r(A) = 2$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 14 \neq 0$$

$r(A) = 2$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$$

3×3

$$1 \leq r(A) \leq \underset{\min\{3,3\}}{\overset{\shortparallel}{3}} \iff r(A) \in \{1, \cancel{2}, \cancel{3}\}$$

• Verificare che il rango sia 3 ($r(A) = 3$)

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\underbrace{(-1)^2}_{1}\det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + 1\underbrace{(-1)^3}_{-1}\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + 3\underbrace{(-1)^4}_{1}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= [4 \cdot 9 - 6 \cdot 6] - [2 \cdot 9 - 6 \cdot 3] + 3[2 \cdot 6 - 4 \cdot 3] =$$

$= [36-36] - [18-18] + 3[12-12] =$

$= 0 - 0 + 3\cancel{\times}0 = \underline{0} \Rightarrow A$ singolare

Poiché il $\det(A) = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$

e inoltre

$r(A) \underline{<} 3$

- Verificare che il rango sia 2:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

tutte le sottomatrici quadrate di ordine 2 sono singolari

$\Downarrow$

$r(A) \neq 2$

$r(A) < 2$

$\Downarrow$

$r(A) = 1$

Verifica che il rango sia 1:

$$\underset{1 \times 1}{\det(9)} = 9 \neq 0$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3×3

$1 \leq r(A) \leq 3 \iff r(A) \in \{1, 2, 3\}$

Verifichiamo se: $r(A) = 3$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = +1 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{- (-1)}_{= +1} \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

3×3

$$= [6 - \cancel{4 \cdot 0}] + [\underbrace{2 \cdot 3}_{6} \underbrace{- 4 \cdot 3}_{-12}] =$$

$$= 6 - 6$$

$$= 0$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$

$\Downarrow$

$r(A) < 3$

- Verifichiamo che il rango sia 2 ($r(A) = 2$)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - \cancel{4 \cdot 0} = 6 \neq 0$$

2×2

Poiché il det. di questa sottom. 2×2 è diverso da $0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r(A) = 2.$

Esempio di esercizio

Verificare se i 3 vettori di seguito dati sono <u>linearmente indipendenti</u> (Definizione 1):

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$K = 3$ (num. di vettori)

$n = 3$ (dimensione di ciascun vettore)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3×3

Calcolo il rango di A

$1 \leq r(A) \leq 3 \iff r(A) \in \{1, 2, 3\}$

- Verifico $r(A) = 3$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= [-1\cdot 1 - 3\cdot 2] + [2\cdot 2 - (-1)(3)] =$$

$$= [-1-6] + [4+3] =$$

$$= -7 + 7$$

$$= 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$$

$$< 3$$

Il rango di A non è massimo

$\Downarrow$

I vettori $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ non sono linearmente indipendenti (oppure, in maniera equivalente, sono lin. dipendenti).

CASO PARTICOLARE

- Se ho K vettori di $\mathbb{R}^n$ (ciascuno con n componenti) e $K > n$ (il numero di vettori supera la dimensione di ciascun vettore), allora sicuramente i K vettori sono linearmente dipendenti

- Affinché K vettori di $\mathbb{R}^n$ siano lin. indipendenti, deve accadere che $K \leq n$.

Esempio

$K = 3$

$n = 2$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lin. dipendenti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3

$$1 \le r(A) \le 2 \iff \underbrace{r(A) \in \{1, 2\}}_{\text{valore massimo}}$$