INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

Esempio di II Prova Intercorso

domanda n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
risposta										

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

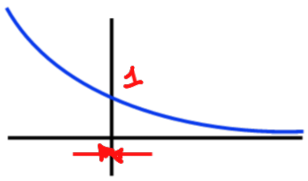
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(+\infty)^2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{+\infty}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$$

si può affermare che

~~A)~~ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+3}} = 1.$

B) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+3}} = +\infty.$

C) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+3}} = 0.$

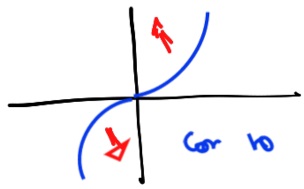


2) Sia f la funzione definita dalla legge $f(x) = x^n$, con n dispari. Si può affermare che

~~A)~~ f è crescente e concava per ogni x minore di zero.

B) f è decrescente e convessa per ogni x minore di zero.

C) f è crescente e concava su tutto $\mathbb{R}$.



3) Sia f una funzione definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$ un punto in cui la funzione ammette massimo relativo. Si può affermare che

A) $f'(x_0) > 0$ o $f'(x_0) = 0$.

B) $f'(x_0) < 0$ o $f'(x_0) = 0$.

~~C)~~ $f'(x_0) = 0$ o $\nexists f'(x_0)$.

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = 2x + \log(3x^3) - \left(\frac{1}{x}\right)$$

x^{-1}

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}.$

~~B)~~ $f'(x) = 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}.$

C) $f'(x) = 2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{\cancel{3}x^{\cancel{3}}}\cdot \cancel{9}^{3}\cancel{x^2} - \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$$

5) Sia f la funzione definita dalla legge $\boxed{f(x) = e^{-3x} - 4x.}$ Si può affermare che

in $[0,1]$

A) f ha più di uno zero nell'intervallo $]0,1[$.

~~B)~~ f ha un unico zero nell'intervallo $]0,1[$.

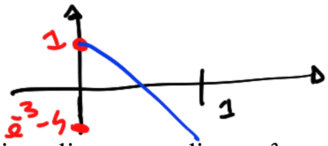
$f(0) = e^0 = 1 > 0$

$f(1) = e^{-3} - 4 \simeq 0.05 - 4 < 0$

$$f'(x) = e^{-3x}\cdot(-3) - 4 = \underbrace{-3\underbrace{e^{-3x}}_{>0}}_{<0} - 4 < 0 \qquad f' < 0$$

f. monotona

C) f non si annulla nell'intervallo $]0,1[$.



6) Dati $\underline{a}_1 = (5,0,1)$, $\underline{a}_2 = (0,-4,2)$, la loro combinazione lineare mediante $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ è

A) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (10,-2,2)$.

B) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = (10,-2,3)$.

C) $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = \left(\frac{5}{2},-2,3\right)$.

$$\underline{e} = \lambda_1\cdot\underline{a}_1 + \lambda_2\cdot\underline{a}_2$$
$$= 2(5,0,1) + \tfrac{1}{2}(0,-4,2)$$
$$= (10,0,2) + (0,-2,1) =$$
$$= (10,-2,3)$$

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può affermare che

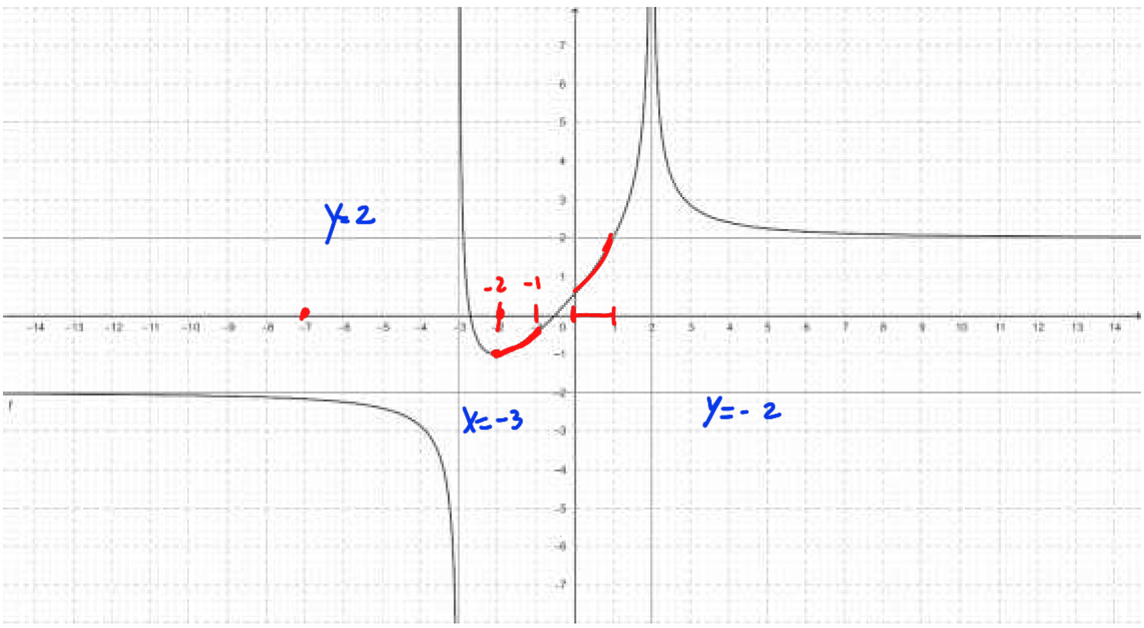
A) A è una matrice singolare.

$$\det(A) = 3\cdot 1\cdot 0 = 0$$

B) A è una matrice triangolare inferiore.

C) A è una matrice non singolare con $\det(A) < 0$.

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

A) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = +\infty$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

B) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$; $\qquad \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

C) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(-7) < 0$ $\quad f'(-2) < 0$ $\quad f''(-2) > 0.$

~~B)~~ $f'(-7) < 0$ $\quad f'(-2) = 0$ $\quad f''(-2) > 0.$

C) $f'(-7) > 0$ $\quad f'(-2) = 0$ $\quad f''(-2) < 0$

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) Nell'intervallo $[-2, -1]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri.

~~B)~~ il massimo assoluto della restrizione della funzione all'intervallo [0, 1] è 2.

C) nessuna delle precedenti.

ESERCIZIO

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{4e^{-3x}}{x-1}$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $\left[0, \frac{4}{5}\right]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

a) $E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$x \neq 1$

$\frac{\infty}{\infty}$ p.i.

$\frac{\infty}{m} = \infty$

b) • $\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^{-3x}}{x-1} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty$

• $\lim_{x \to 1^-} \frac{4e^{-3x}}{x-1} = \frac{4e^{-3}}{0} \simeq \frac{4e^{-3}}{0.9-1} \simeq$

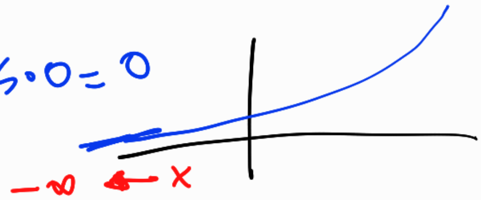
$= \frac{4e^{-3} > 0}{0^-} \simeq \frac{0.2}{0^-} = -\infty$

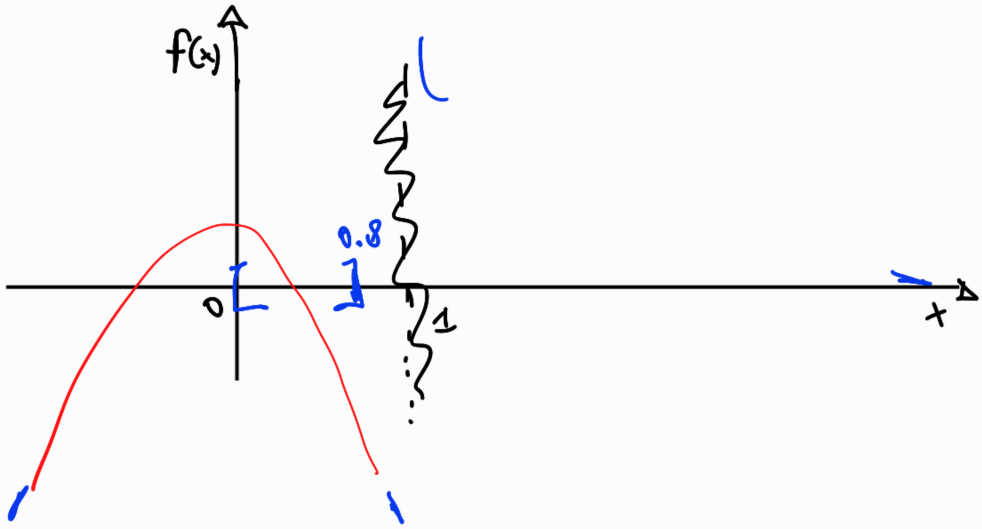
• $\lim_{x \to 1^+} \frac{4e^{-3x}}{x-1} = \frac{4e^{-3}}{0} \simeq \frac{4e^{-3}}{1.1-1} = \frac{4e^{-3}}{0^+} = +\infty$

$-3(+\infty) = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{4e^{-3x}}{x-1} = \frac{0}{+\infty - 1} = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+$

$$4\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} = 4 \cdot 0 = 0$$





c) $f(x) = \dfrac{4e^{-3x}}{x-1}$

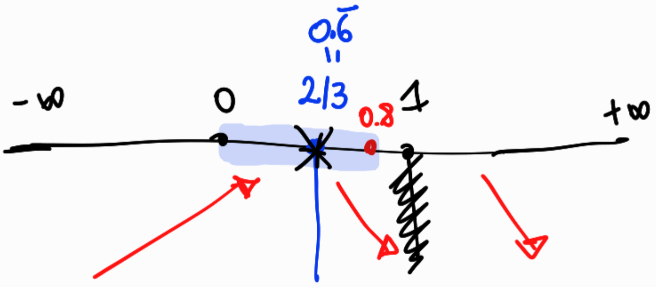
$$f'(x) = \frac{4e^{-3x}(-3)(x-1) - 4e^{-3x}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-12\,e^{-3x}(x-1) - 4\,e^{-3x}}{(x-1)^2} = \frac{4e^{-3x}\left[(-3)(x-1) - 1\right]}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{4e^{-3x}(-3x+3-1)}{(x-1)^2} = \frac{\underbrace{4e^{-3x}}_{>0}(2-3x)}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0}} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2-3x \geq 0 \Longleftrightarrow 3x-2 \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \simeq 0.\overline{6}$$

$$\forall x \in E[f(x)]$$



$$\frac{2}{3} \in \left[0, \frac{4}{5}\right]$$

$x = \dfrac{2}{3}$ p.to massimo relativo

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4e^{-3\cdot\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}-1} = \frac{4e^{-2}}{-\frac{1}{3}} = -12e^{-2} \simeq -1.62$$

d) $I = \left[0, \frac{4}{5}\right]$

Candidati: $x=0$, $x=\frac{4}{5}$, $x=\frac{2}{3}$

$$f(0) = \frac{4e^{0}}{-1} = \frac{4}{-1} = -4 = \text{MIN ASS.}$$

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4e^{-3\cdot\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}-1} = \frac{4e^{-\frac{12}{5}}}{-\frac{1}{5}} = -20\,e^{-12/5} \simeq -1.81$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -12e^{-2} \simeq -1.62 = \text{MAX ASS.}$$

- -4 è minimo assoluto in $\left[0, \frac{4}{5}\right]$ e $x=0$ è punto di minimo assoluto
- $-12e^{-2}$ è massimo assoluto e $x=\frac{2}{3}$ " " massimo assoluto