Algebra Lineare

Parte 2

Definizione di matrice

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ (due numeri naturali).

Si definisce matrice A di $\mathbb{R}^{m \times n}$ una tabella contenente $m \times n$ numeri reali, disposti in m righe ed n colonne del tipo:

(Matrice in forma estesa)

$a_{1,1}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

n. di colonne

$(m \times n)$

num. di righe

num. di colonne

$m \times n$ denota le dimensioni della matrice.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \; ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ;$$

2×2 matrice quadrata di ordine 2

3×3 matrice quadrata di ordine 3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \; ; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

Matrice in forma compatta

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

dimensione:
$m \times n$

Casi particolari

- $m = 1 \Rightarrow$ la matrice si riduce ad un vettore riga:

$$A = (a_{\cancel{1}1}, a_{\cancel{1}2}, \dots, a_{\cancel{1}n}) =$$
$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) = \underline{a} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1 \times n} \text{ (matrice)}$$

- $n = 1 \Rightarrow$ la matrice si riduce ad un vettore colonna

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\cancel{1}} \\ a_{2\cancel{1}} \\ \vdots \\ a_{m\cancel{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \underline{a} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$$

(matrice)

Trasposizione di vettori

1) $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ (vettore riga)

$\underline{a}' = \underline{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (vettore colonna)

(vettore a trasposto)

La trasposta di un vettore riga è un vettore colonna

2) $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ (vettore colonna)

$\underline{b}' = \underline{b}^T = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$

La trasposta di un vettore colonna è un vettore riga

3) La trasposta di una matrice (o matrice trasposta) è quella matrice che ottengo invertendo le righe con le colonne.

Esempio

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \qquad A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

3×4

(3×2)

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

- $\boxed{m = n}$ $\Rightarrow$ la matrice si dice quadrata e la dimensione prende nome di ordine.

  Una matrice avente $m = n$ righe e colonne si dice matrice quadrata di ordine n (oppure m).

- $\boxed{m \neq n}$ $\Rightarrow$ la matrice si dice rettangolare

Matrici quadrate

- Si definisce diagonale (diagonale principale) di una matrice quadrata) il vettore degli elementi aventi stesso indice di riga e di colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$

$$\operatorname{diag}(A) = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{diag}(A) = (1, -1, 1)$$

- Si definisce matrice diagonale una matrice (quadrata) avente elementi non nulli solo lungo la diagonale.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

- Si definisce matrice identica (o matrice identità) una matrice diagonale avente tutti gli elementi (lungo la diagonale) uguali a 1. Essa si denota con I_n (si legge "matrice identica di ordine n").

Esempio

$$n = 2 \rightarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 3 \rightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n \text{ generico}: \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si definisce matrice triangolare superiore una matrice (quadrata) avente elementi tutti nulli sotto la diagonale.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4×4

- Si definisce matrice triangolare inferiore una matrice (quadrata) avente elementi tutti nulli sopra la diagonale.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

4×4

Prodotto scalare (tra due vettori)

delle stesse dimensioni

Siano:

$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ (vettore riga)

$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m)' \in \mathbb{R}^m$ (vettore colonna)

Il prodotto scalare $\underline{a} \cdot \underline{b}$ è un prodotto tra un vettore riga e un vettore colonna delle stesse dimensioni che si definisce come segue:

$$\langle a, b\rangle = \underline{a} \cdot \underline{b} = (\underbrace{a_1}, \underbrace{a_2}, \dots, \underbrace{a_n}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\in \mathbb{R}}{a_1 \cdot b_1} + \underset{\in \mathbb{R}}{a_2 \cdot b_2} + \underset{\in \mathbb{R}}{a_3 \cdot b_3} + \dots + \underset{\in \mathbb{R}}{a_n \cdot b_n} =$$

$$= d \in \mathbb{R} \quad (\text{il risultato è uno scalare})$$

Esempio

$$\underline{a} = (-3, 2, 1, -2) \in \mathbb{R}^4$$

$$\underline{b} = \left(\tfrac{1}{2}, 5, -4, 8\right)' \in \mathbb{R}^4$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (-3, 2, 1, -2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = (-3)\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 5 + (1)(-4) + (-2)(8)$$

$$= -\frac{3}{2} + 10 - 4 - 16 = -\frac{3}{2} - 10 = -\frac{23}{2}$$

Determinante di una matrice quadrata

Assegnata una matrice quadrata A, è possibile associare ad essa un numero (reale) detto <u>determinante</u>, denotato con

$\det(A)$ e che può essere uguale a zero o diverso da zero:

- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ la matrice si dice non singolare

  (o invertibile, nel senso che ammette matrice inversa A^{-1}, ossia quella matrice tale che $A \cdot A^{-1} = I$)

- $\det(A) = 0 \Rightarrow$ la matrice è singolare

  (oppure non invertibile, nel senso che non ammette l'inversa A^{-1})

Calcolo del determinante di una matrice (quadrata)

Il determinante di una matrice quadrata si calcola con la regola di La Place.

CASO $n=1$

$A = (a_{11})$

$\det(A) = a_{11}$

Esempio $A = (-3) \Rightarrow \det(A) = |A| = -3$

CASO $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2

(Applicazione della regola di La Place in matrici quadrate di ordine 2)

$$\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = (-5)(3) - (-1)(2) = -15 + 2 = -13 \neq 0$$

matrice non singolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}; \quad \det(A) = 1(-8) - \cancel{(-2) \cdot 0} = -8$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det(I_2) = 1 \cdot 1 - \cancel{0 \cdot 0} = 1$$

Una matrice identica ha sempre determinante uguale a 1, quale che sia il suo ordine.

CASO $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3×3

$$\det(A) = 3\underbrace{(-1)^2}_{=1} \det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 1\underbrace{(-1)^3}_{=-1} \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2\underbrace{(-1)^4}_{=1} \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3\left[(-1)(-3) - \cancel{(5)(0)}\right] - \left[\underbrace{4(-3)}_{=-12} - \underbrace{(5)(-2)}_{+10}\right] +$$

$$+ 2\left[\cancel{4 \cdot 0} - (-1)(-2)\right] =$$

$$= 3\cdot 3 - (-2) + 2(-2) =$$

$$= 9 + 2 - 4 = 11 - 4 = 7 \neq 0$$

CASI PARTICOLARI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \cancel{0(-1)^3 \det(\;)} + \cancel{0(-1)^4 \det(\;)} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{2\cdot 0} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)(5) = \frac{5}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 \det(4) = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$$

Il determinante di una matrice triangolare (superiore o inferiore) o diagonale è sempre uguale al prodotto degli elementi della diagonale (qualunque sia l'ordine della matrice).

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3

$\det(A) = 1(-2)(0) = 0$ matrice singolare

- Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ i vettori riga (o colonne) della matrice sono linearmente indipendenti tra di loro.
- Se $\det(A) = 0 \Rightarrow$ i vettori riga (o colonne) della matrice sono linearmente dipendenti tra di loro.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$$

2ª riga è il doppio della prima

$\det(A) = 3(-10) - (-5)(6) = -30 + 30 = 0$