INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

Esempio di II Prova Intercorso

domanda n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
risposta										

1) Dato il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left(\frac{-3x^5-4x+1}{x^2-5x+3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\log\left(\frac{-3x^{\cancel{5}\,3}}{\cancel{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\log(-3x^3) = \log\left(-3(-\infty)^3\right) =$$

$$-3(-\infty)$$

$$= \log(+\infty) = +\infty$$

si può affermare che

A) $\lim_{x\to-\infty}\log\left(\frac{-3x^5-4x+1}{x^2-5x+3}\right) = 0.$

B) $\lim_{x\to-\infty}\log\left(\frac{-3x^5-4x+1}{x^2-5x+3}\right) = +\infty.$

C) $\lim_{x\to-\infty}\log\left(\frac{-3x^5-4x+1}{x^2-5x+3}\right) = 1.$

2) Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ un punto in cui si abbia $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \geq 0$. Possiamo affermare che

$<$

A) x_0 è un punto di minimo relativo.

B) x_0 è un punto di massimo relativo.

C) nessuna delle precedenti.

$f'' > 0$

$f'' < 0$

3) Siano $f: X \subseteq R \longrightarrow R$ e $x_0 \in X$ un punto in cui la funzione è derivabile. Si può affermare che

$f'' = 0$

A) se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 è un punto di estremo relativo.

B) se x_0 è un punto di estremo relativo allora $f'(x_0) = 0$.

C) x_0 è un punto di estremo relativo se e solo se $f'(x_0) = 0$.

$\Leftrightarrow$

Analoga domanda per $f''(x_0)$ (Andare a rivedere)

4) Data la funzione definita mediante la legge

$$f(x) = 2x\,e^{-x^2+2x^3} + 5$$

$f'\cdot g + f\cdot g'$

stabilire la risposta corretta

A) $f'(x) = 2e^{-x^2+2x^3} + (12x^3 - 4x)e^{-x^2+2x^3} + 5.$

B) $f'(x) = 2e^{-x^2+2x^3} - (-2x + 6x^2)e^{-x^2+2x^3}.$

C) $f'(x) = 2e^{-x^2+2x^3} + (12x^3 - 4x^2)e^{-x^2+2x^3}.$

$f'(x) = 2\cdot e^{-x^2+2x^3} + 2x(-2x+6x^2)e^{-x^2+2x^3}$

$f'(x) = 2e^{-x^2+2x^3} + (-4x^2+12x^3)e^{-x^2+2x^3}$

5) Sia f la funzione definita dalla legge $f(x) = \log(3x+1) + 2x + 1$. Si può affermare che

A) f ha più di uno zero nell'intervallo $]0,1[$.

$E[f(x)] = \{x : 3x+1>0\} =]-\frac{1}{3}, +\infty[$

B) f ha un unico zero nell'intervallo $]0,1[$.

C) f non si annulla nell'intervallo $]0,1[$.

$f(0) = \log(1) + 0 + 1 = 1 > 0$

$f(1) = \log(4) + 2 + 1 = \log 4 + 3 > 0$

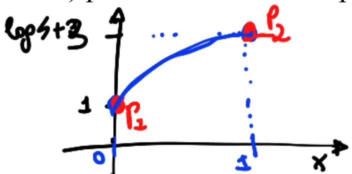
6) Dati i vettori riga $a_1 = (-1, 0, 7, 5)$, $a_2 = (4, -2, 5, 0)$, si può affermare che

risposta

A) può essere definito il prodotto scalare $a_1 \cdot a_2'$.

B) può essere definito il prodotto scalare $a_1' \cdot a_2'$.

$(\ )\cdot(\ )$



$$f'(x) = \frac{1}{3x+1}\cdot 3 + 2 = \frac{3}{3x+1} + 2 > 0 \quad \forall x \in E[f]$$

> 0

$(\; , \; , \; , \;)\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = e_1 \cdot e_2$ V. riga V. colonne

$e_1(-1,0,7,5)$

$e_2=(4,-2,5)$

C) nessuna delle precedenti. Esercizio alternativo: combinazione lineare oppure calcolo del prodotto scalare

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si può affermare che

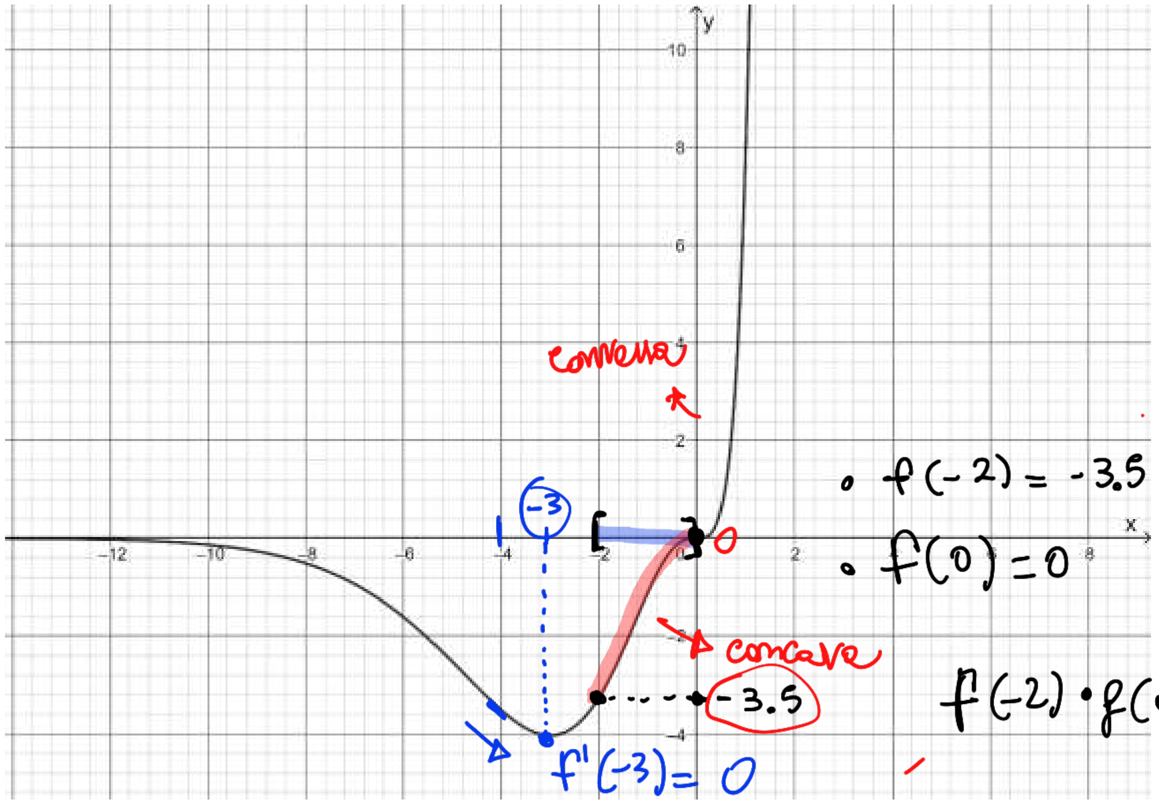
A) A è una matrice non singolare.

$\det(A) = 3 \cdot 0 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow A$ singolare

B) A è una matrice triangolare inferiore. FALSA

~~C)~~ nessuna delle precedenti. Esercizio alternativo: calcolo determinante

Si consideri il grafico della funzione $f(x)$ riportato in figura.



- $f(-2) = -3.5 < 0$
- $f(0) = 0$

$f(-2) \cdot f(0) = 0$

< 0

8) Facendo riferimento al grafico, si può affermare che

$f'(-4) < 0$

~~A)~~ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; V $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. V

B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; V $\qquad \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$. F

C) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; F $\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. V

9) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) $f'(-4) < 0 \qquad f'(-3) < 0 \qquad f''(0) > 0.$

B) $f'(-4) > 0$ F $\qquad f'(-3) = 0$ V $\qquad f''(0) < 0.$

C) $f'(-4) < 0$ $f'(-3) = 0$ $f''(0) = 0$ $\exists\, c \in \,]a, b[$

10) Facendo riferimento allo stesso grafico, si può affermare che

A) nell'intervallo $[-2,0]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema degli zeri. F (lo zero deve essere interno a $]-2,0[$)

B) nell'intervallo $[-2,0]$ la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Weierstrass.

C) nessuna delle precedenti.

ESERCIZIO

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

a) determinarne il campo di esistenza;
b) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
c) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
d) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $[0, 2]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

ESERCIZIO (Esempio alternativo)

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = x^2 \log x$$

e) determinarne il campo di esistenza;
f) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
g) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
h) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

ESERCIZIO (Esempio alternativo)

Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = xe^{\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + 1}$$

i) determinarne il campo di esistenza;
j) calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza;
k) determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo;
l) dopo aver verificato se sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Weierstrass nell'insieme $[0, 4]$, determinarne gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto.

N.B.

1) Si consiglia di ripetere bene le funzioni elementari trattate, specie la funzione esponenziale e quella logaritmica (codominio, monotonia, concavità).

2) Ripetere bene le disequazioni esponenziali, logaritmiche e di II grado.

Ulteriori esempi di funzioni per l'esercizio aperto (vedere prove 2022/2023)

1) $f(x) = \dfrac{\text{esponenziale composta}}{\text{polinomio grado I}}$

2) $f(x) = \dfrac{\text{polinomio grado I}}{\text{esponenziale composta}}$

3) $f(x) = \dfrac{\text{logaritmo composto}}{\text{polinomio grado I}}$

4) $f(x) = \dfrac{\text{polinomio grado I}}{\text{logaritmica composta}}$

$f'(x) \geq 0$

diseq. I grado
" II grado
" espon.
" log.

Limiti notevoli da ricordare:

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad a > 1, \ \alpha > 0$

- quindi, il reciproco, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad a > 1, \ \alpha > 0$

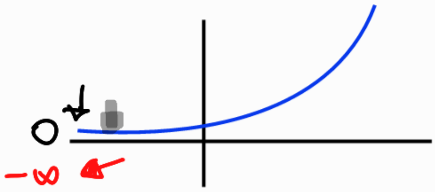
- $\lim_{x \to -\infty} a^x x^\alpha = (0)(\pm\infty) = 0^{\pm} \qquad a > 1, \ \alpha > 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha > 0$

- quindi, il reciproco, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = \pm\infty \qquad \alpha > 0$

- $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0 \qquad \alpha > 0$

Esercizio 1



$$f(x) = (x^2-3)e^x$$

a) $E[f(x)] = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

b) $\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{x^2-3}_{+\infty})\underbrace{e^x}_{e^{-\infty}} = (+\infty)(0^+) = 0^+$

+ veloce

$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{x^2-3}_{+\infty})\underbrace{e^x}_{e^{+\infty} \to +\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$\frac{\pm\infty}{0^\pm} = \pm\infty$ non è f.i.

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$ $\quad$ f.i.

$0(\pm\infty)$ $\quad$ f.i.

$$f(x) = (x^2-3)e^x$$

c) $f'(x) = 2x e^x + (x^2-3)e^x$

$= e^x(2x + x^2 - 3)$

e^{-x} f. composta

$D[e^{-x}] = e^{-x} \cdot (-1) =$

$= -e^{-x}$.

$f'(x) = \underset{\overset{\vee}{0}}{e^x}(x^2+2x-3) \geq 0 \iff$

$\iff x^2+2x-3 \geq 0 \iff x \leq -3 \vee x \geq 1$

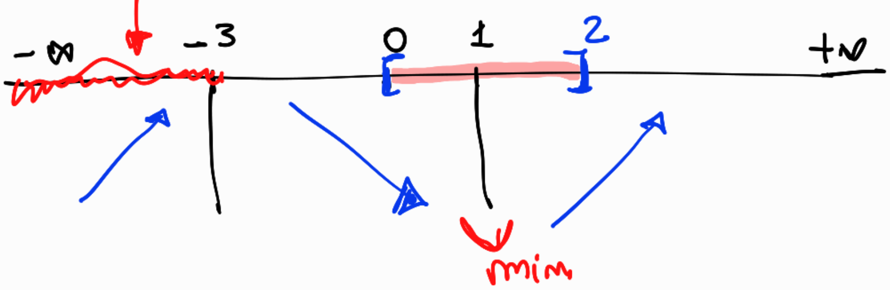
eq. ass.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $\to x_1 = -3$, $\to x_2 = 1$

$\boxed{f'(x) \geq 0} \iff f$ è stret. crescente $\qquad \nearrow$ f. crescente (stret.)

$\boxed{x \le -3 \vee x \ge 1}$ $f' > 0$ ↘ f. decrescente (//)



$x = -3$ p.to di max rel.

$x = 1$ p.to min rel.

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

$$f(-3) = (9-3)e^{-3} = 6e^{-3} \simeq 0.2987$$

$$f(1) = (1-3)e = -2e = -5.4366$$

$I = [0, 2]$

$$\boxed{f(x) = (x^2-3)e^x}$$

Candidati: $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$

$$f(1) = -2e \simeq -5.4366 = \text{MIN. ASS.}$$

$$f(0) = (0-3)e^0 = -3 \cdot 1 = -3$$

$$f(2) = (\underbrace{4-3}_{=1})e^2 = e^2 = 7.39 = \text{MAX ASS.}$$

$f(x) = -2e$ è min ass. in $[0, 2]$ e $x = 1$ è p.to min ass.

$f(x) = e^2$ è max ass. in $[0, 2]$ e $x = 2$ è p.to max ass.

$$f(x) = x^2 \cdot \log x$$

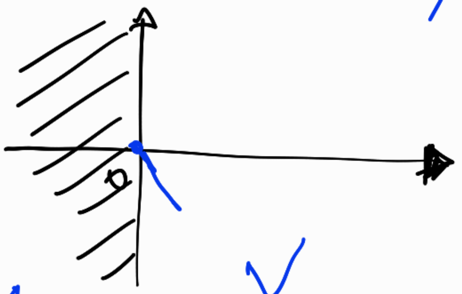
C.E. $x > 0$

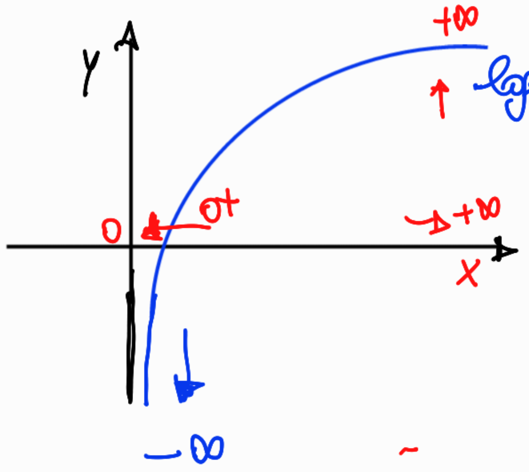
e) $E[f(x)] =]0, +\infty[$

b) • $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^2}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{\log x}_{\to \log(0^+) \to \boxed{-\infty}} = 0^+(-\infty) = 0^-$ (+ veloce)

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^d \log_a x = 0 \quad d>0}$$

• $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\log x}_{\to \log(+\infty) \to +\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$





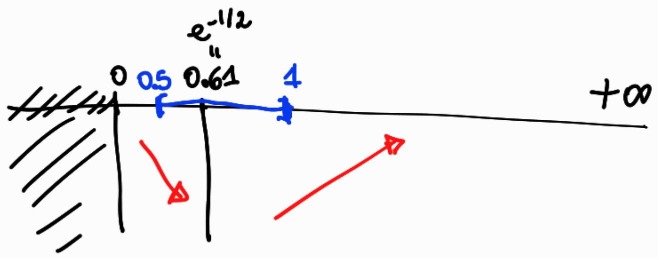
$f(x) = x^2 \log x$

$f'(x) = 2x\cdot \log x + \cancel{x^2}\cdot \frac{1}{\cancel{x}} = 2x\cdot\log x + x = x(2\log x + 1)$

$f'(x) \geq 0 \iff \underset{\substack{\vee \\ 0}}{x}\cdot(2\log x + 1) \geq 0 \iff 2\log x + 1 \geq 0 \iff$

$\iff 2\log x \geq -1 \iff \log x \geq -\frac{1}{2} \iff \begin{cases} x \geq e^{-1/2} \\ x \cancel{>} 0 \end{cases}$ superflua

$f'(x) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/2}$ f. crescente



$x = e^{-1/2}$ p.to min rel.

$f(e^{-1/2}) = -0{,}1839$

$$I = \underbrace{\left[\frac{1}{2}\right.}_{0{,}5}, \left.1\right]$$