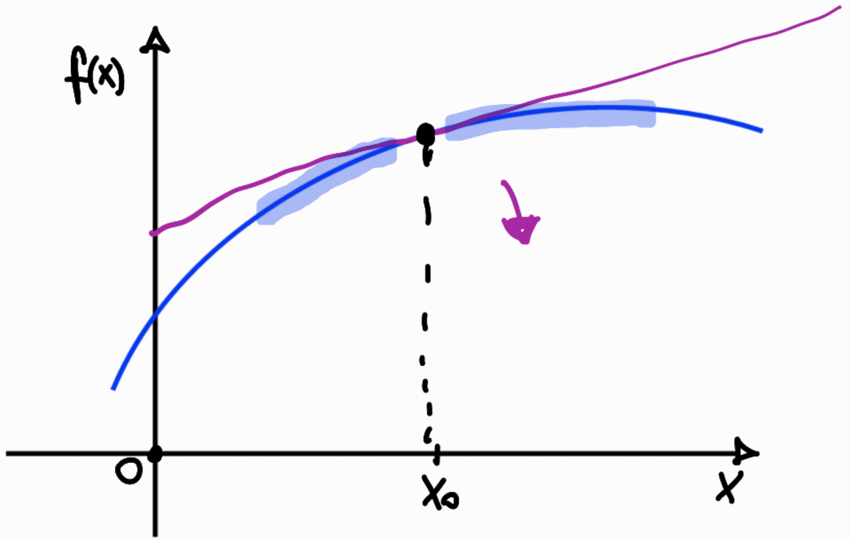
Concavità e Convessità

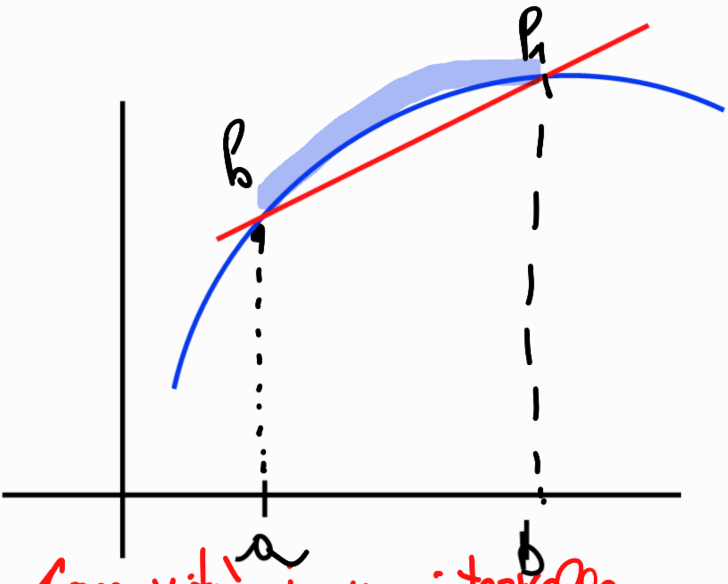


Concavità in un punto

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

La funzione f è concava in x_0 se il grafico di f sta sotto la retta tangente il grafico di f nel punto di ascissa x_0 e:

$$\boxed{f''(x_0) < 0}.$$

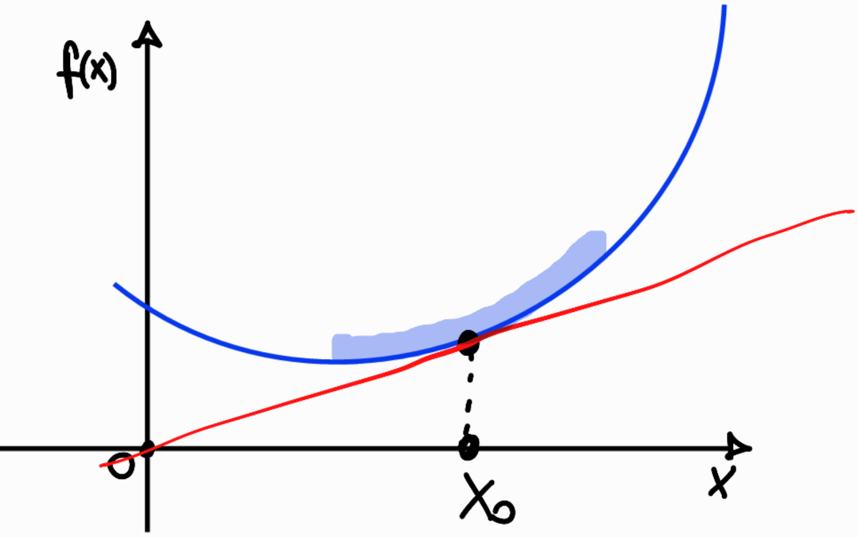


Concavità in un intervallo

Sia $f: [a,b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

La funzione f è concava in $[a,b]$ se il grafico di f sta sopra la retta secante il grafico di f nei punti di ascissa a e b;

$$\boxed{f''(x) < 0 \quad \forall x \in [a,b]}$$

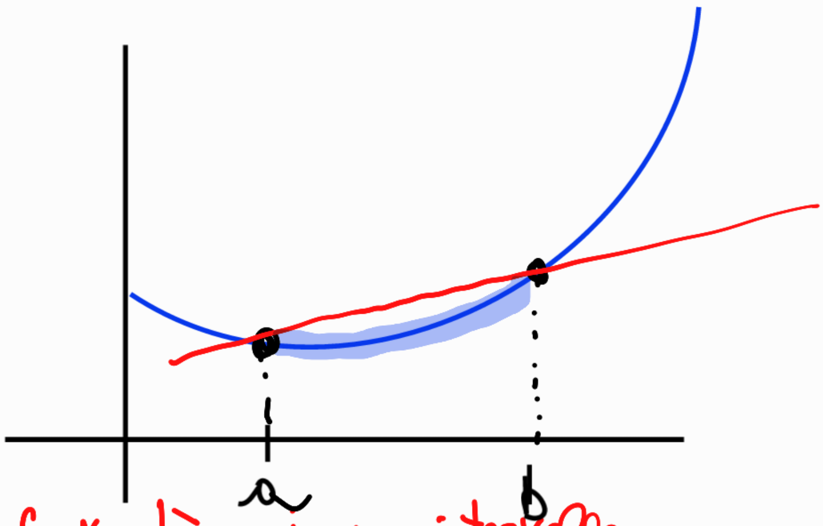


Convessità in un punto

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

La funzione f è convessa in x_0 se il grafico di f sta sopra la retta tangente il grafico di f nel punto di ascissa x_0 e:

$$\boxed{f''(x_0) > 0} \; .$$



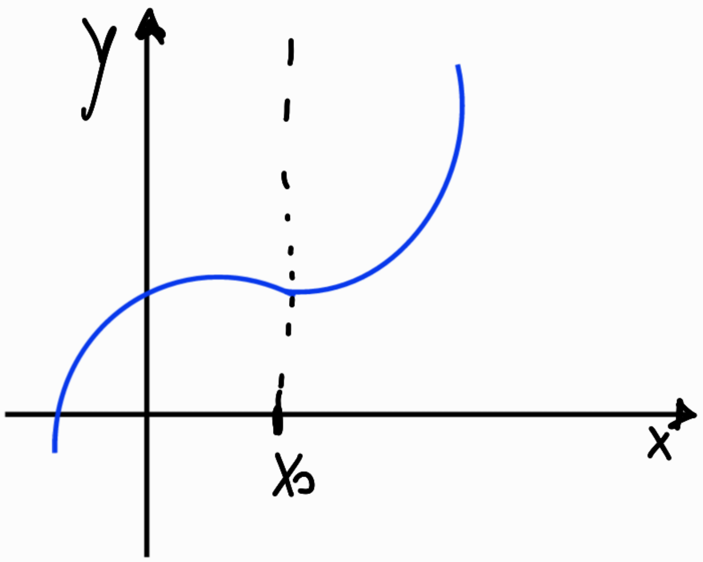
Convessità in un intervallo

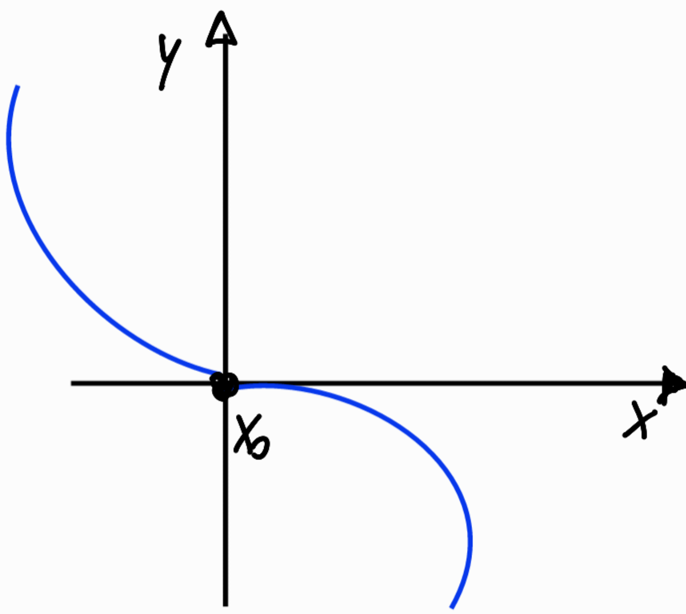
Sia $f:[a,b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

La funzione f è convessa in $[a,b]$ se il grafico di f sta sotto la retta secante il grafico di f nei punti di ascissa a e b;

$$\boxed{f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]}$$

Punti di flesso

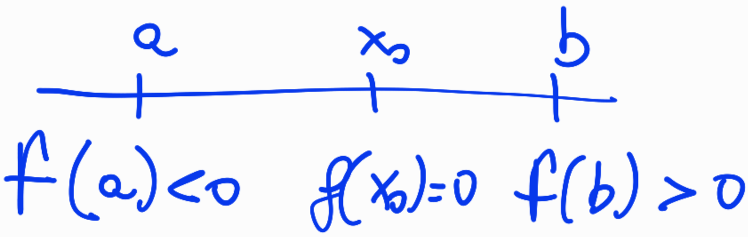


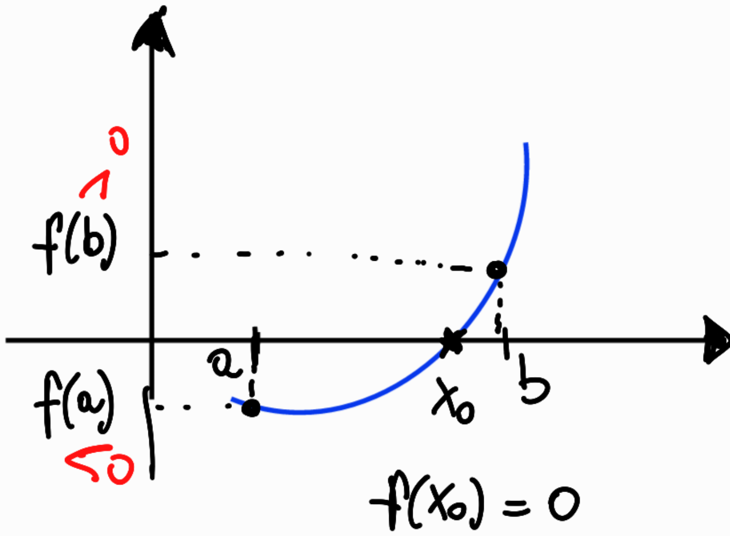


I punti in corrispondenza dei quali avviene un cambio di concavità sono detti punti di flesso. Se la funzione è derivabile due volte e x_0 è un punto di flesso, allora:

$$\boxed{f''(x_0)=0}.$$

Teorema degli zeri





Assunzioni

Sia $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

- 1) Se f è continua in $[a,b]$.
- 2) $$\left.\begin{matrix} f(a)<0 \text{ e } f(b)>0 \\ \text{oppure} \\ f(a)>0 \text{ e } f(b)<0 \end{matrix}\right\} \iff f(a)\cdot f(b)<0$$

Allora (Teo):

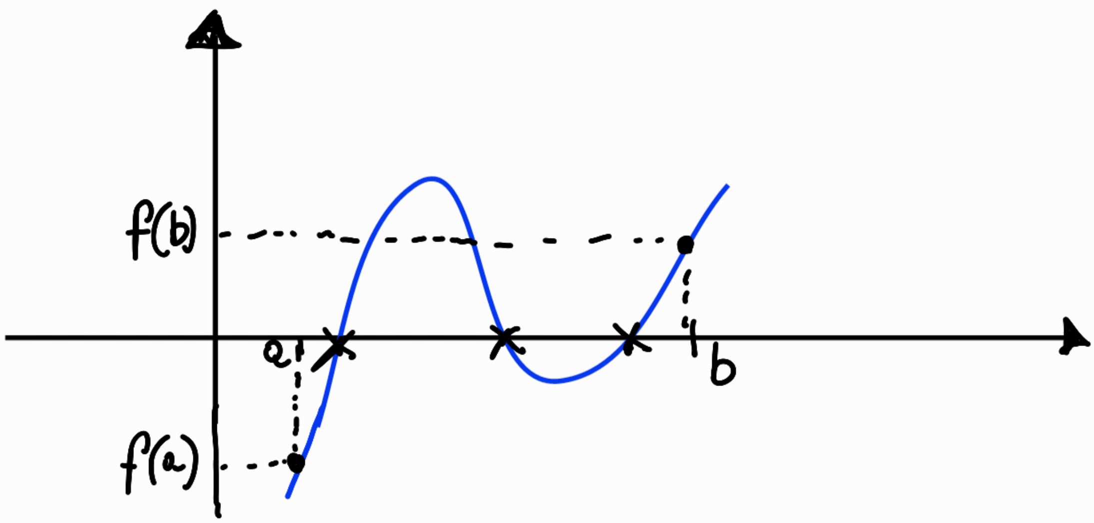
$$\exists \quad x_0 \in \,]a,b[\; : f(x_0) = 0 .$$

Se, inoltre:

- 3) f è monotona in $[a,b]$, allora:

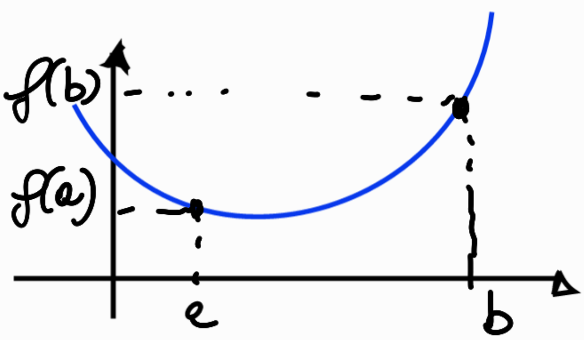
Allora (Teo):

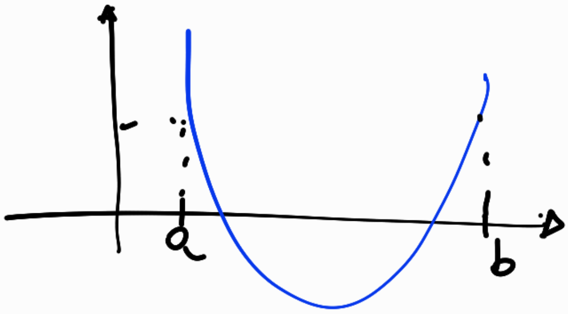
$$\exists! \; x_0 \in \,]a,b[\; : f(x_0) = 0 .$$



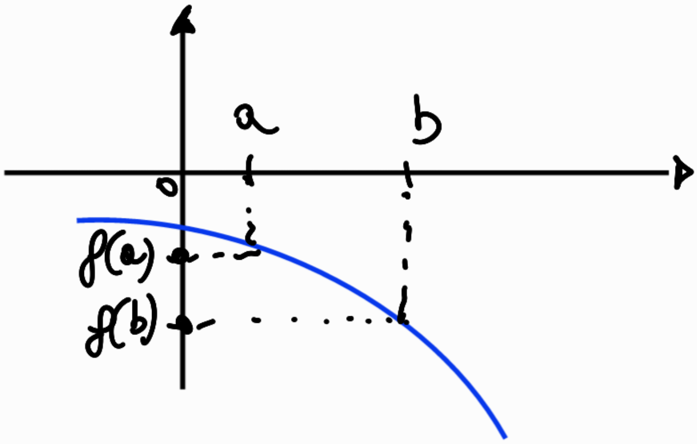
Controesempio

- $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$



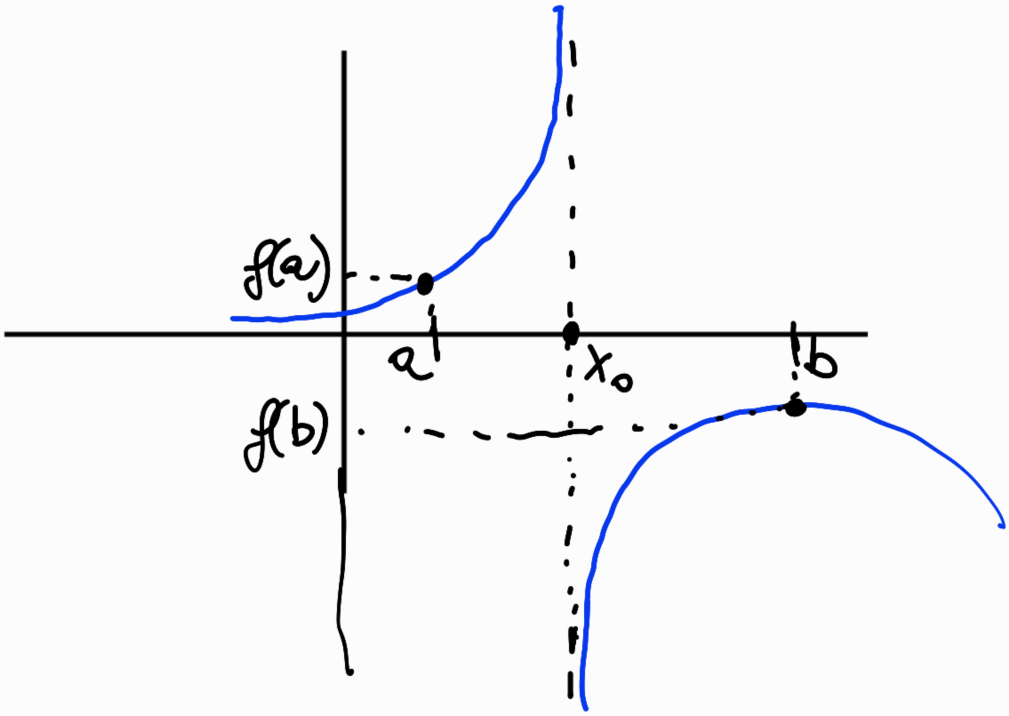


• $f(a) < 0 \quad f(b) < 0$



$f(a) \cdot f(b) < 0$ (vale)

f non continua in $[a,b]$



Esempio di applicazione

Domanda: Quanti zeri ammette la funzione

$f(x) = 3x + \log(x+4)$ in $[-3,0]$?

a) 0
b) 1
c) più di 1.

Svolgimento

$f(x) = 3x + \log(x+4)$

$E[f(x)] =]-4, +\infty[$

C.E. $x+4>0$

$x>-4$

$\Downarrow$

Quindi in $[-3,0]$ è continua.

$$f(-3) = 3(-3) + \log(-3+4) = -9 + \underbrace{\log 1}_{=0} = -9 < 0$$

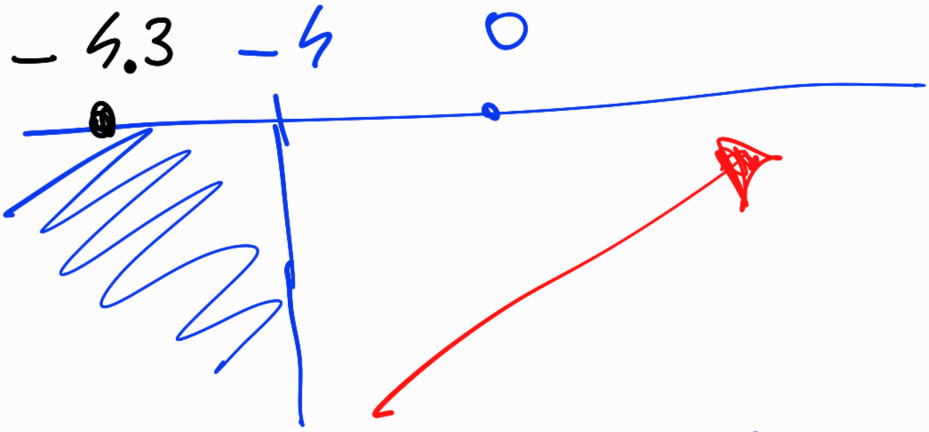
$$f(0) = 0 + \log 4 = \log 4 > 0$$

Valori di segno opposto

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x+4}\cdot 1 = 3 + \frac{1}{x+4} = \frac{3(x+4)+1}{x+4} = \frac{3x+12+1}{x+4} = \frac{3x+13}{x+4}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{3x+13}{\underbrace{x+4}_{>0}} \geq 0 \iff 3x+13 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{13}{3} \simeq -4.\overline{3} \notin E[f(x)]$$



f è strett. crescente (quindi monotona) laddove definita ⟹

$$\Rightarrow \exists!\, x_0 \in [-3, 0] : f(x_0) = 0.$$

Risposta corretta: b).