Teorema di Weierstrass

(Funzionale alla ricerca dei punti di min/max assoluti)

$$f : [a, b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} .$$

Se una funzione f è definita e continua in un intervallo $[a, b]$ (ossia un compatto), allora essa ammette massimo e minimo assoluto, ossia:

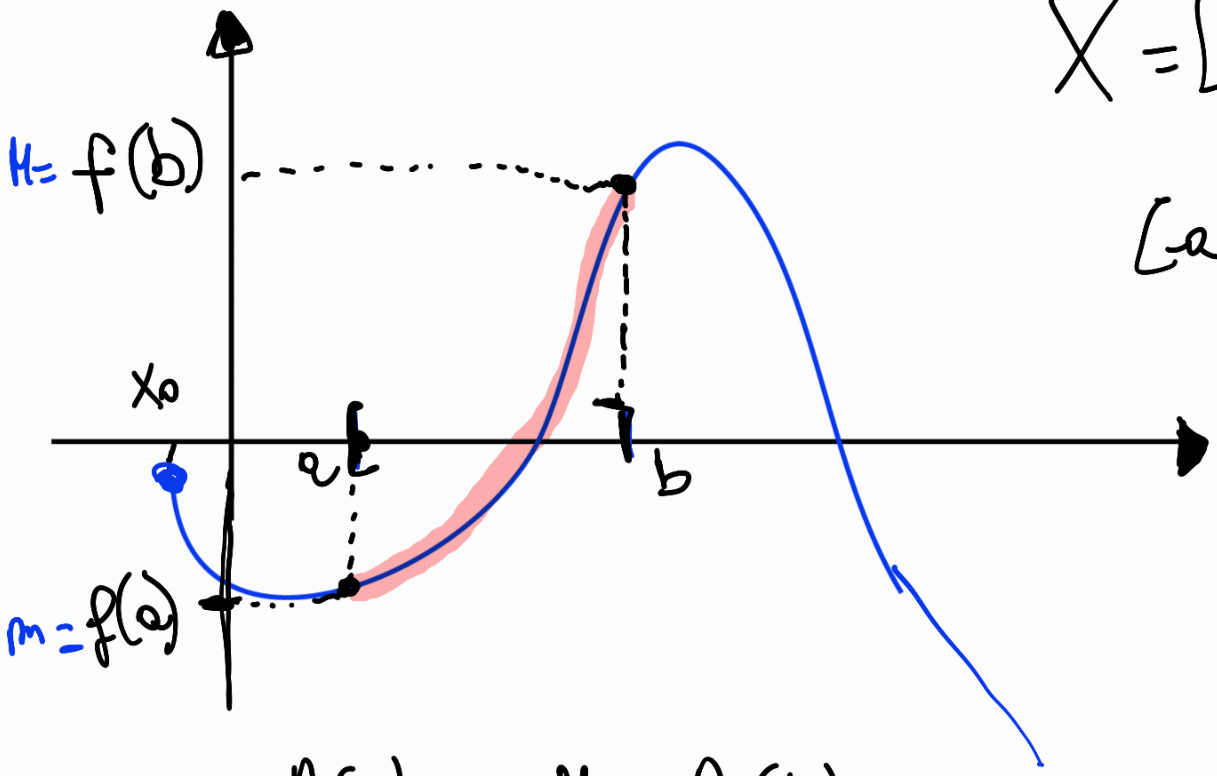
$$\exists \min f(x) = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\exists \max f(x) = M \in \mathbb{R}$$

e

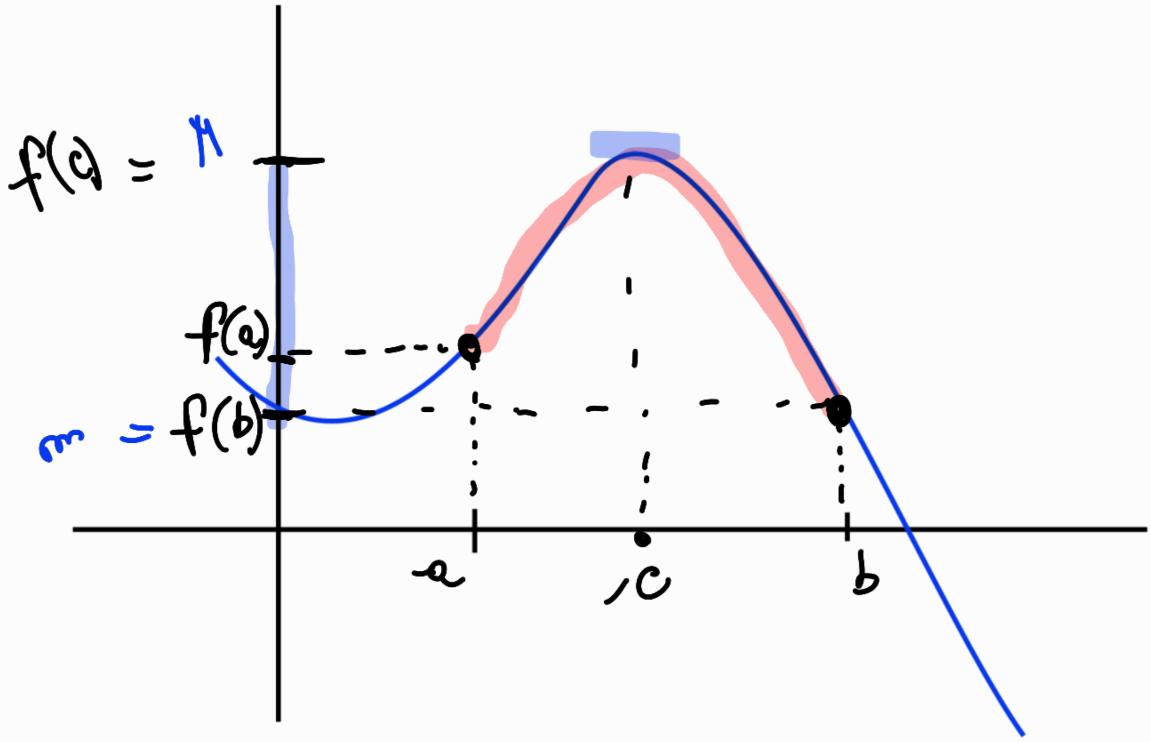
$$m \leq f(x) \leq M .$$

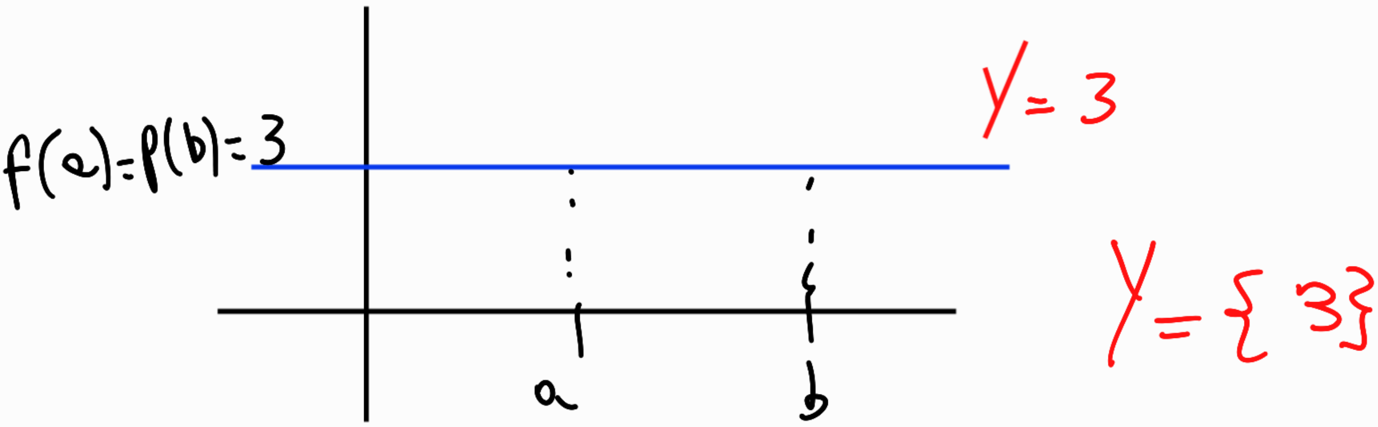


$$X = [x_0, +\infty[$$

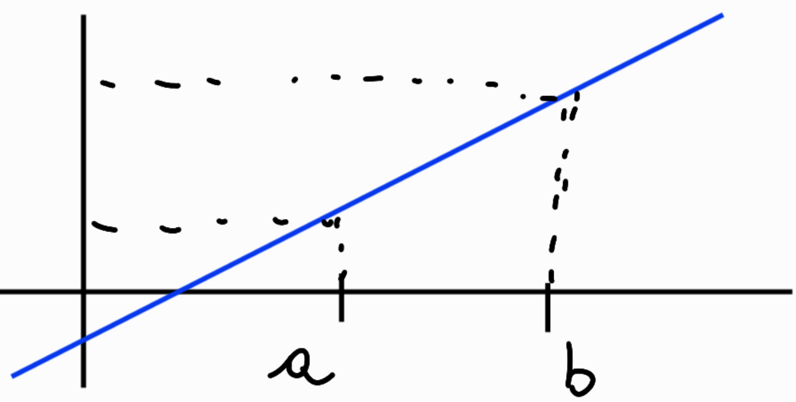
$$[a, b]$$

$$m = f(a) \qquad M = f(b)$$





$$m = f(x) = M = 3$$



Corollario del Teorema di Weierstrass

Se per una funzione f vale il teorema di Weierstrass in un intervallo del tipo $[a, b]$, allora i punti di MIN/MAX ASSOLUTO vanno cercati tra 3 tipi di punti:

- gli estremi di $[a, b]$, ossia $x = a$ e $x = b$;
- i punti interni ad $]a, b[$ in cui la derivata prima è uguale a zero/ di min/max relativo
- i punti interni ad $]a, b[$ di non derivabilità.

I punti di non derivabilità sono punti in cui la funzione $f(x)$ è definita ma la sua derivata prima $f'(x)$ no.

$x = x_0$ è di non derivabilità se $\begin{array}{l} x_0 \in E[f(x)] \\ x_0 \notin E[f'(x)] \end{array}$

Esempio

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad X = [0, +\infty[$ $\qquad x \geq 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad X' =]0, +\infty[$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Applicazioni del Teorema di Weierstrass

$$f(x) = \frac{x-3}{e^x}$$

a) Trovare gli eventuali p.ti min/max relativo

b) Trovare i punti di max/min assoluto nella restrizione $[1,3]$ se in tale intervallo vale il t. di Weierstrass.

$$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : e^x \neq 0\} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

a) $$f(x) = \frac{x-3}{e^x}$$

$$D[x-3] = 1 - 0$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)' e^x - (x-3)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - e^x(x-3)}{(e^x)^2}$$

$$e^x(1-(x-3))$$

$$= \frac{\cancel{e^x}(1-(x-3))}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x+3}{e^x} = \frac{4-x}{e^x}$$

$$\frac{\cancel{e^x}(x-3)}{\cancel{e^x}} = (x-3)$$

$$\underbrace{e^x} - \underbrace{e^x}(x-3) = e^x(1-(x-3))$$

$$\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1$$

$$e^x(1-x+3)$$

$$e^x(4-x)$$

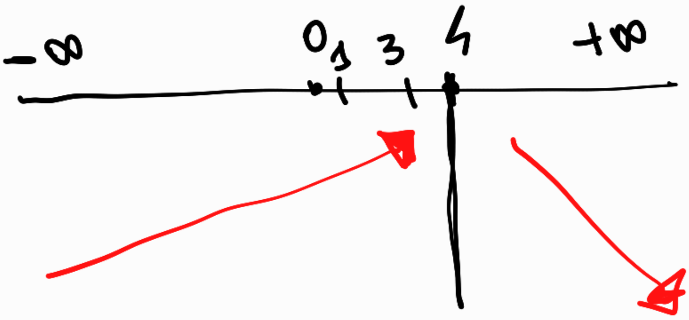
$$\frac{\cancel{e^x}(x-3)}{\cancel{e^x}} = x-3$$

$$\boxed{f'(x) \geq 0}$$

$$f'(x) = \frac{4-x}{\underbrace{e^x}_{>0}} \geq 0 \iff 4-x \geq 0 \iff -4+x \leq 0$$

$$\iff x-4 \leq 0 \iff \boxed{x \leq 4}$$

f. strett. crescente



$x=4 \in E[f(x)]$

$f'(4)=0$

$x=4$ p.to max relativo

$$f(4)=\frac{4-3}{e^4}=\frac{1}{e^4}=e^{-4}\simeq 0.018$$

$$f=\frac{x-3}{e^x}$$

b) In $[1,3]$ vale Weierstrass.

Candidati: $x=1$, $x=3$

$$f(1)=\frac{1-3}{e}=\frac{-2}{e}\simeq -0.74 = \min f(x) \text{ assoluto}$$

$$f(3)=\frac{3-3}{e^3}=\frac{0}{e^3}=0 = \max f(x) \text{ assoluto}$$

$\min f(x)=\frac{-2}{e}$ e $x=1$ p.to min assoluto.

$\max f(x)=0$ e $x=3$ p.to max assoluto.

in $[1, 10]$

Candidati: $x=1$, $x=10$, $x=4$.

$f(1) = \frac{-2}{e} = -2e^{-1} \simeq -0.74 = \text{MIN}$

$f(10) = \frac{10-3}{e^{10}} = \frac{7}{e^{10}} \simeq 3.2 \cdot 10^{-4} = 0.00032$

$f(4) = e^{-4} \simeq 0.018 = \text{MAX}$

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{x+2} \quad \text{in } \left[-3, -\frac{11}{5}\right]$$

$E[f(x)] =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

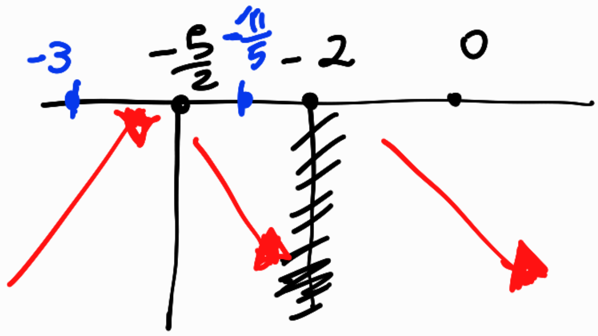
$$f'(x) = \frac{e^{-2x} \cdot (-2)(x+2) - e^{-2x}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{e^{-2x}\left(-2(x+2) - 1\right)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{e^{-2x}\left(-2x-4-1\right)}{(x+2)^2} :$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{e^{-2x}}^{>0}(-2x-5)}{\underbrace{(x+2)^2}_{>0}} \geq 0 \iff -2x-5 \geq 0$$

$$2x+5 \leq 0 \qquad x \leq -\frac{5}{2}$$



$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{e^{-\cancel{2}\left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right)}}{-\frac{5}{2}+2} = \frac{e^5}{-\frac{1}{2}} = -2e^5 \simeq -296.8$$

$$\left[-3, -\frac{11}{5}\right]$$

Candidati: $x = -3$; $x = -\frac{11}{5}$; $x = -\frac{5}{2}$

$$f(-3) = \frac{e^{-2(-3)}}{-3+2} = \frac{e^6}{-1} = -e^6 \simeq -403.4$$

$$f\left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{e^{-2\left(-\frac{11}{5}\right)}}{-\frac{11}{5}+2} = \frac{e^{+\frac{22}{5}}}{-\frac{1}{5}} = -5e^{\frac{22}{5}} = -407.25$$

"MIN" ASS.

$f\left(-\frac{5}{2}\right) = -2e^{5} \simeq -296.8$ = MAX ASS

$\min f(x) = -5e^{\frac{22}{5}}$ e $x = \frac{-11}{5}$ p.to min ass.

$\max f(x) = -2e^{5}$ e $x = -\frac{5}{2}$ p.to max ass.