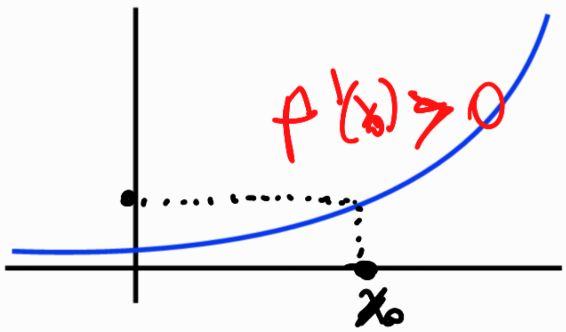
Applicazioni della derivata

Segno della derivata in un punto

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Se $\exists\, f'(x_0)$, allora:

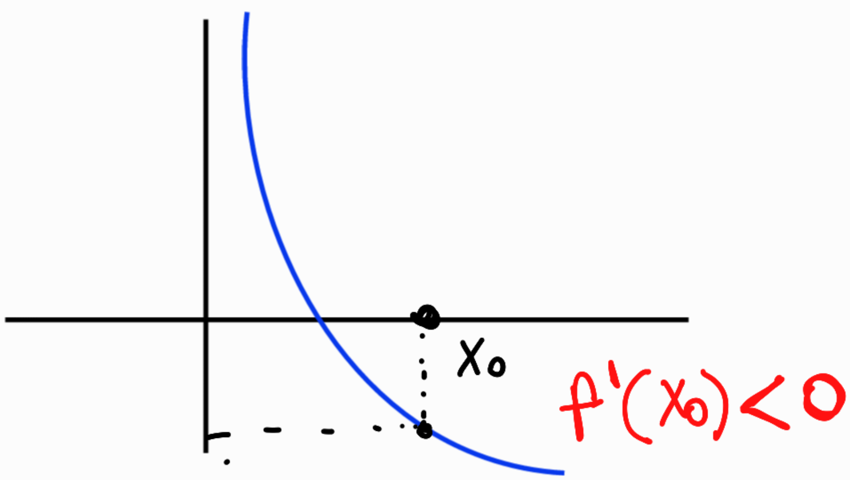
- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è strett. crescente in x_0
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ è strett. decrescente in x_0
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ nulla si può dire. Bisogna studiare il segno della derivata di ordine superiore.



$f(x) = e^x \qquad x = 2$

$f'(x) = e^x$

$f'(2) = e^2 = 2.7^2 > 0$

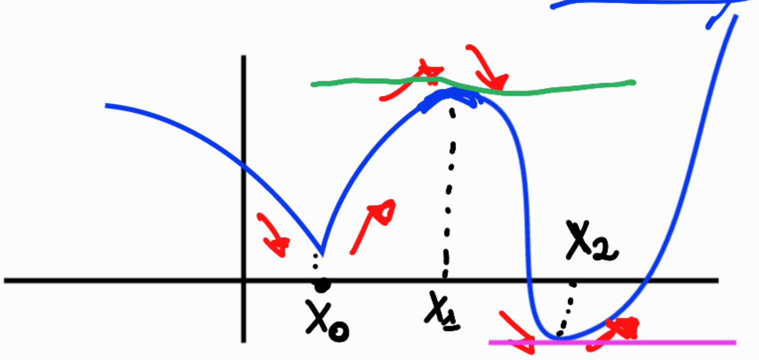


Teorema di Fermat

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Se la funzione f ammette in x_0 un minimo o un massimo relativo, allora:

- o $\exists f'(x_0)$ e $f'(x_0) = 0$; (Condizione del I ordine o condizione necessaria)
- oppure $\nexists f'(x_0)$.



$y = ax + b$

$a = 0 = f'(x_2)$

Criterio di monotonia (Corollario del Teorema di Lagrange)

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $[a, b] \subseteq X$.

Se f è:

- costante $\iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$
- crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
- strett. crescente $\iff f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$

- decrescente $\iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
- strett. decrescente $\iff f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Derivata seconda

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in X.

Se la derivata prima di f, ossia $f'(x)$, ammette derivata, quest'ultima prende nome di derivata seconda e si denota con $f''(x)$

Esempio

$f(x) = 3x^4$

$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$

$D[f'(x)] = D[12x^3] = 12 \cdot 3x^2 = 36x^2 = f''(x)$

- $f(x) = e^x$
- $f'(x) = e^x$
- $f''(x) = e^x$
- $f'''(x) = e^x$

$f(x) = 2x^2$

$f'(x) = 4x$

$f''(x) = 4$

$f'''(x) = 0$

Determinazione dei punti di min/max relativo di una funzione

1° Metodo (canonico): applicazione delle condizioni del I e del II ordine (o condizione necessaria e sufficiente)

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e f derivabile due volte in X.

condizione necessaria: (di I ordine) $f'(x) = 0$ e verificare se $\exists\, x_0 : f'(x_0) = 0$.

x_0 è detto punto critico oppure punto stazionario.

condizione sufficiente: (di II ordine)

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo relativo
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di max relativo
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ nulla si può dire.

2° Metodo: applicazione del criterio di monotonia

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e f derivabile in X.

Studiare $f'(x) > 0$ mi restituisce, se esiste, l'intervallo o gli intervalli del campo di esistenza in cui la funzione è strett. crescente.
Altrove, sarà strett. decrescente.

Inoltre: se $\exists\, x_0 : f'(x_0) = 0$, allora:

- se $x_0 \in X \Rightarrow x_0$ è p.to min/max relativo
- se $x_0 \notin X \Rightarrow x_0$ mi aiuta (solo) a determinare la monotonia

Esempi - Ricerca di Punti di Massimo/Minimo Relativo

- $f(x) = e^x - x$

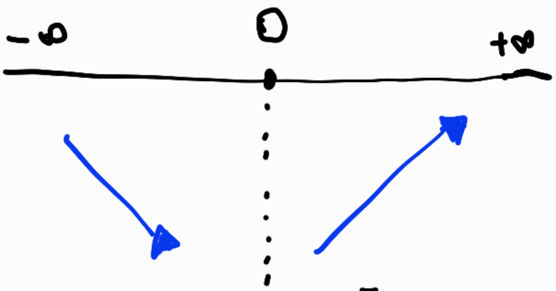
$E[f(x)] = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) \underset{\geq}{>} 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > \underset{e^0}{\underset{\parallel}{1}} \iff$

- $e^x > e^0 \iff x \underset{\geq}{>} 0$
- $e^x > 1 \iff x > \log_e 1 = 0 \iff x > 0 \to f$ è strett. crescente

$x = 0 \in E[f(x)]$



$x=0 \in E[f]$

- $f(x)$ è strett. decrescente $\forall x \in]-\infty, 0[$
- $f(x)$ è strett. crescente $\forall x \in]0,+\infty[$

$x=0$ è p.to minimo relativo

$f(0) = e^0 - 0 = e^0 = 1$ è il minimo relativo

• $\boxed{f(x) = \log(x^2+3x-4)}$

$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x^2+3x-4 > 0\} =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$

Eq. ass. $x^2+3x-4=0$

$\Delta = b^2-4ac = 9-4(1)(-4) = 9+16 = 25 > 0$

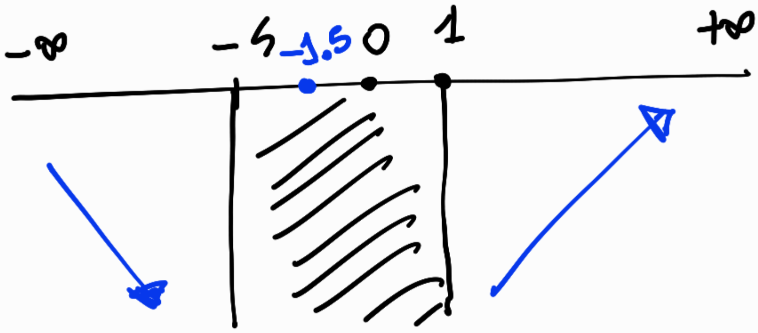
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3\pm 5}{2}$ $\nearrow x_1 = -4$, $\searrow x_2 = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+3x-4} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x-4}$

$f'(x) > 0 \iff \frac{2x+3}{\underbrace{x^2+3x-4}_{>0}} > 0 \iff 2x+3 > 0 \quad \forall x \in E[f]$

$\iff x > -\frac{3}{2} = -1.5$

$x = -1.5 \notin E[f]$



$f(x)$ è strett. decresc. $\forall x \in]-\infty, -4[$

$f(x)$ è strett. crescente $\forall x \in]1, +\infty[$

Non esisto p.ti min/max rel.