Derivata

Sia $\boxed{g_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0.

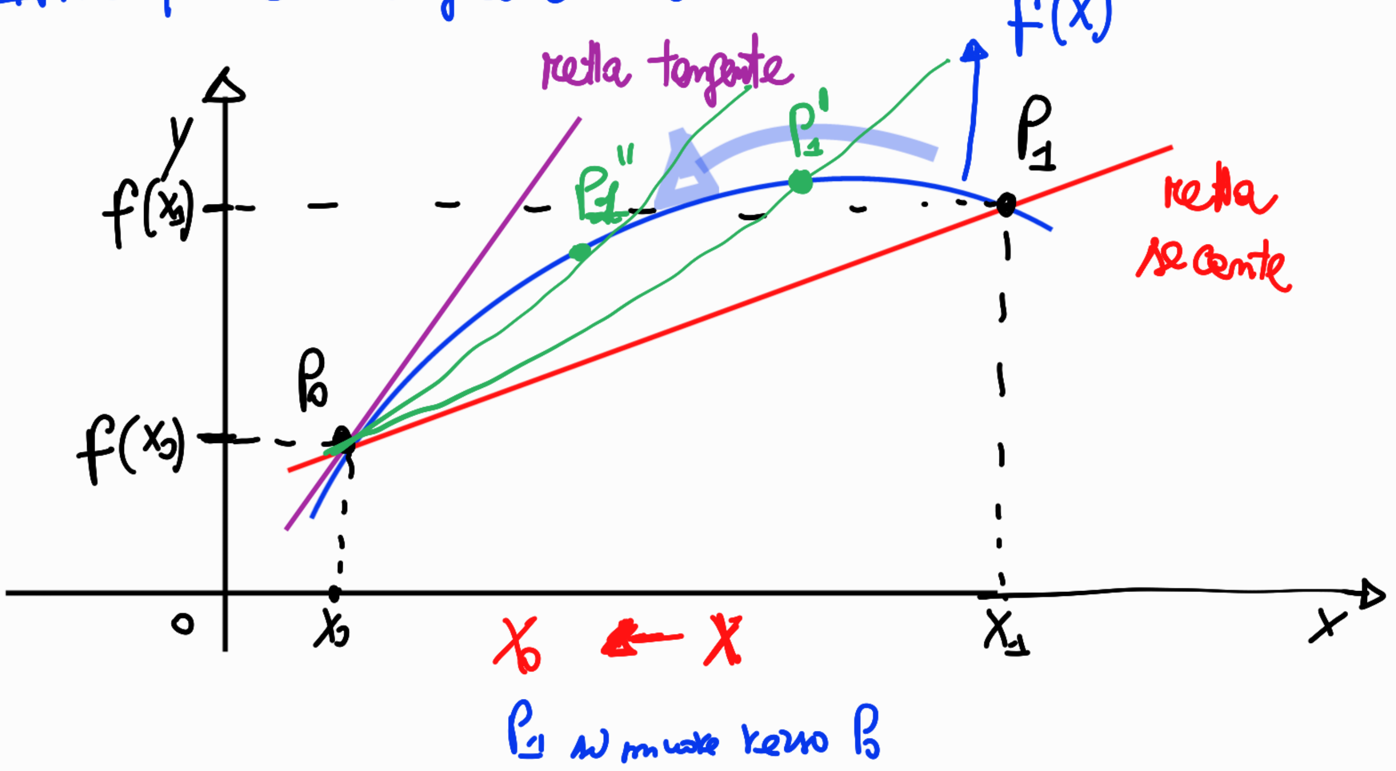
La derivata di f nel punto x_0 è il limite, se esiste, al tendere di x ad x_0 del rapporto incrementale:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Notazione della derivata di f in x_0:

$$\boxed{D[f(x)]\big|_{x = x_0} = f'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$$

Interpretazione geometrica



Equazione della retta tangente: $y = ax + b$

$$y = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= a} \cdot x \underbrace{- \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot x_0 + f(x_0)}_{= b}$$

$y = ax + b$

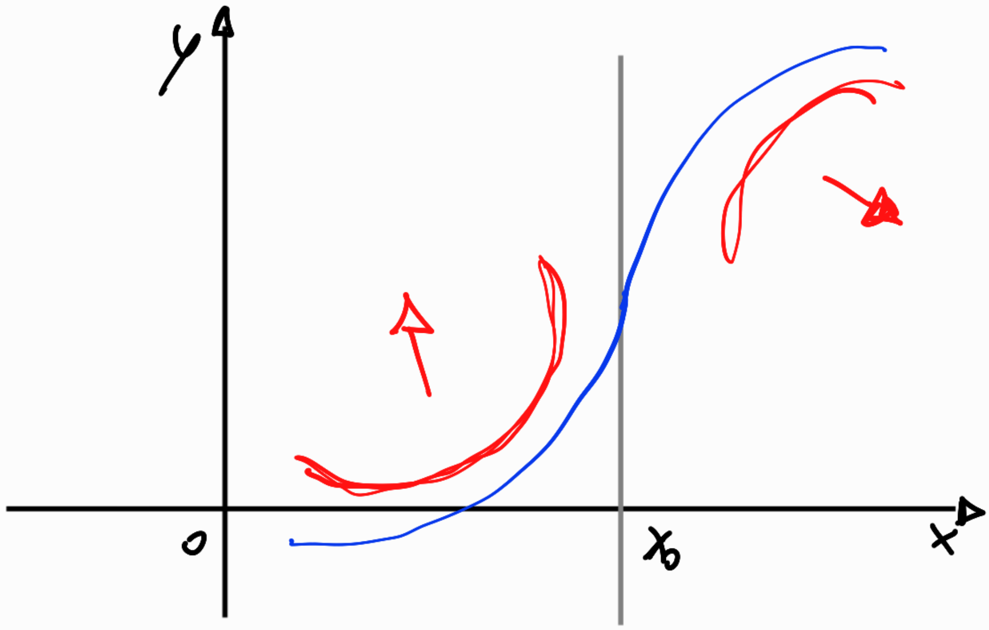
Quindi

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} g_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ non è

altro che il coefficiente angolare della retta tangente il grafico di f nel punto di ascissa x_0.

La derivata di f in x_0 può essere:

- finita $\Rightarrow \exists f'(x_0)$ e che f è derivabile in x_0
- $\pm\infty \Rightarrow \exists f'(x_0)$ ma f non è derivabile in x_0



x_0 è un punto di flesso a tangente verticale

$f'(x_0) = +\infty$

in x_0 f è strett. cresc.

La derivata di f in x_0 non esiste se

$$\nexists \lim_{x\to x_0} f_{x_0}(x) \iff \lim_{x\to x_0^-} f_{x_0}(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f_{x_0}(x)$$

x_0 continua ad essere punto di non derivabilità.

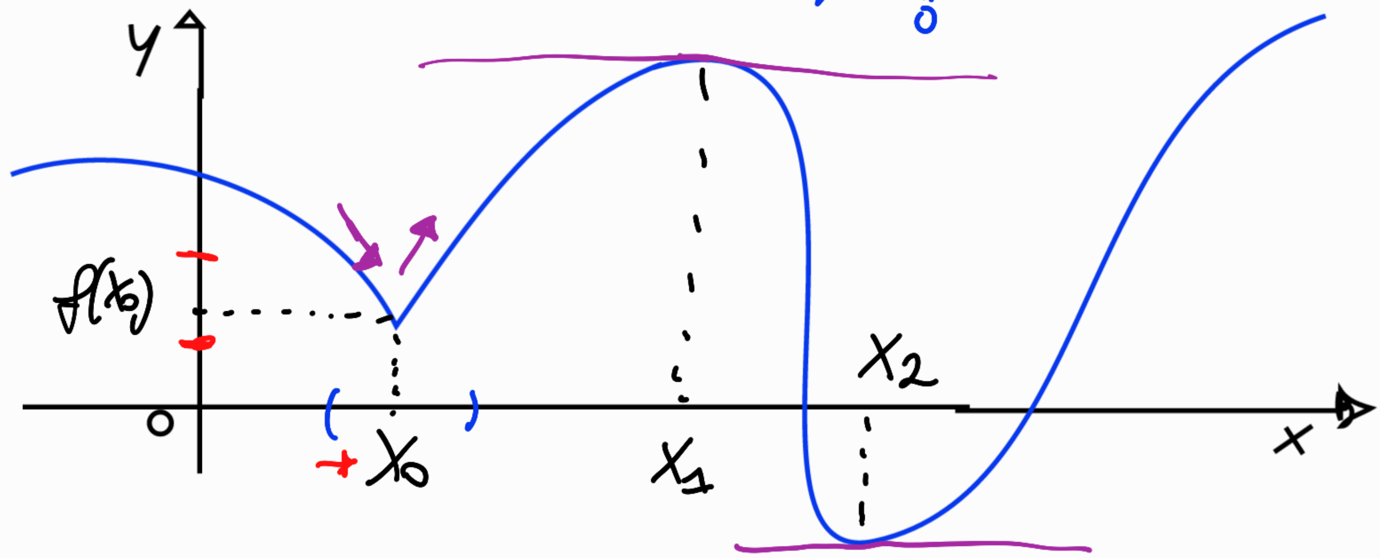
CASO PARTICOLARE IN CUI NON ESISTE $f'(x_0)$.

↓ LA CUSPIDE

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f_{x_0}(x) = l_1 \in \mathbb{R} \\ \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f_{x_0}(x) = l_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right] \to l_1 \neq l_2$$

$y = b$

$y = \underset{0}{\overset{\shortparallel}{a}}x + b$



$$X =]-\infty, +\infty[$$

x_0 è un punto di cuspide.

Si tratta di un punto di non derivabilità in quanto in esso non esiste la derivata. La derivata in x_0 non esiste perché limite sinistro e destro del rapporto incrementale sono finiti ma diversi tra di loro.

$$\boxed{\text{Sia } f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad e\ x_0 \in X.}$$

Derivabilità in un punto x_0 (REMINDER)

La funzione f è derivabile in x_0 se in x_0 esiste il limite del rapporto incrementale e tale limite è finito.

Derivabilità in un insieme X

La funzione f è derivabile nell'insieme X se è derivabile in ogni punto $x \in X$.

Funzione derivata (Concetto diverso da quello di "derivata")

$$\boxed{f' : x_0 \in X \subseteq \mathbb{R} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}}$$

Derivate delle funzioni elementari

- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad f'(x) = n x^{n-1}$

Es. $f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2$

$f(x) = 5x^3 \qquad f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1-2}{2}}$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $f(x) = x^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

- $f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$, $m \in \mathbb{N}$ $f'(x) = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $f(x) = a^{x}$, $a > 0$ $f'(x) = a^{x} \cdot \log a$

CASO PARTICOLARE

$\downarrow$

$f(x) = e^{x}$ $f'(x) = e^{x} \cdot \underbrace{\log e}_{=1} = e^{x}$

Es. $f(x) = 2^{x}$ $f'(x) = 2^{x} \cdot \log 2$

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \cdot \log\left(\frac{1}{3}\right)$

- $f(x) = \log_{a} x$, $a > 0$, $a \neq 1$ $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_{a} e$

$\downarrow$

CASO PARTICOLARE

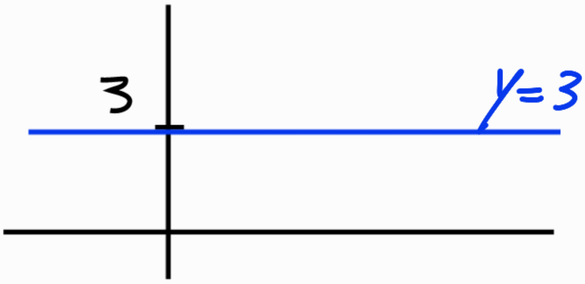
$f(x) = \log x$ $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\log_{e} e}_{=1} = \frac{1}{x}$

Es. $f(x) = \log_5 x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_5 e$

$f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_{\frac{1}{7}} e$

$f(x) = K \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 0$

Es. $f(x) = 3$



Regole di derivazione

- $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

Es. $f(x) = 5x^2 + e^x$

$f'(x) = 10x + e^x$

Es. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \log x$

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3x^2 - \frac{1}{x}$

- $D[f \cdot g] = f' \cdot g + f \cdot g'$

Es.

$$f(x) = \underbrace{5x^4} \cdot \underbrace{e^x}$$

$$f'(x) = (5x^4)' \cdot e^x + (5x^4) \cdot (e^x)'$$

$$= 20x^3 \cdot e^x + 5x^4 \cdot e^x$$

$$= e^x (20x^3 + 5x^4)$$

- $D\left[\dfrac{f}{g}\right] = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Es. $f(x) = \dfrac{5x^3 - 2x}{3x - 1}$

$$f'(x) = \frac{(5x^3 - 2x)'(3x-1) - (5x^3 - 2x)(3x-1)'}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{(5 \cdot 3x^2 - 2)(3x-1) - (5x^3 - 2x)(3)}{(3x-1)^2}$$