Criterio di continuità

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

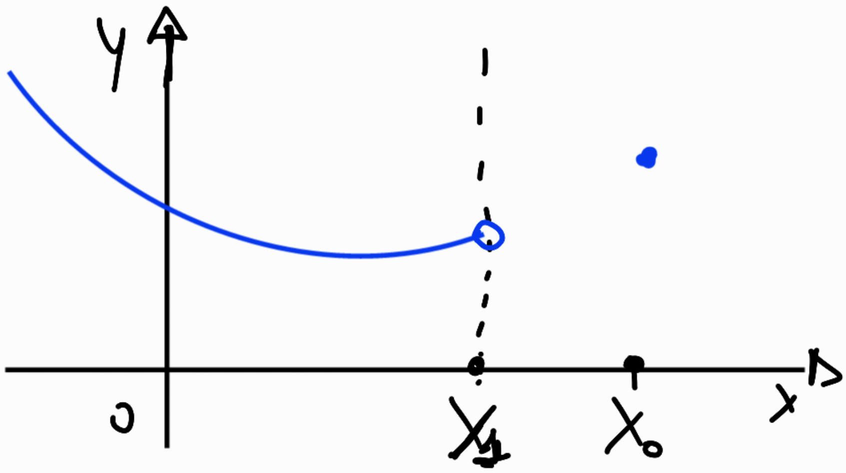
$\boxed{f \text{ è continua in } x_0}$ $\iff$

CASO A

- x_0 p.to di accumulazione per il dominio X di f
- f è regolare in x_0 (ossia $\lim_{x \to x_0^-} f = \lim_{x \to x_0^+} f$)
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

CASO B

x_0 è un punto isolato



$X =]-\infty, x_1[\cup \{x_0\}$

Definizione di funzione continua in un insieme

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f è continua in X se è continua in ogni punto $x \in X$.

Teorema 1 - Sulle funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei loro insiemi di definizione.

Teorema 2 - Sulle funzioni continue

La somma, il prodotto, il rapporto e la composta di due funzioni continue restituisce una funzione altrettanto continua.

Punti di discontinuità

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazione per X ($x_0 \in X$ oppure $x_0 \notin X$).

Se f non è continua in x_0, allora x_0 è un punto di discontinuità.

In particolare, la discontinuità è:

- eliminabile se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f = \lim_{x \to x_0^+} f = l \right)$$

(in altre parole, se la funzione in x_0 è convergente)

• **non eliminabile** se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ (non esiste limite finito)

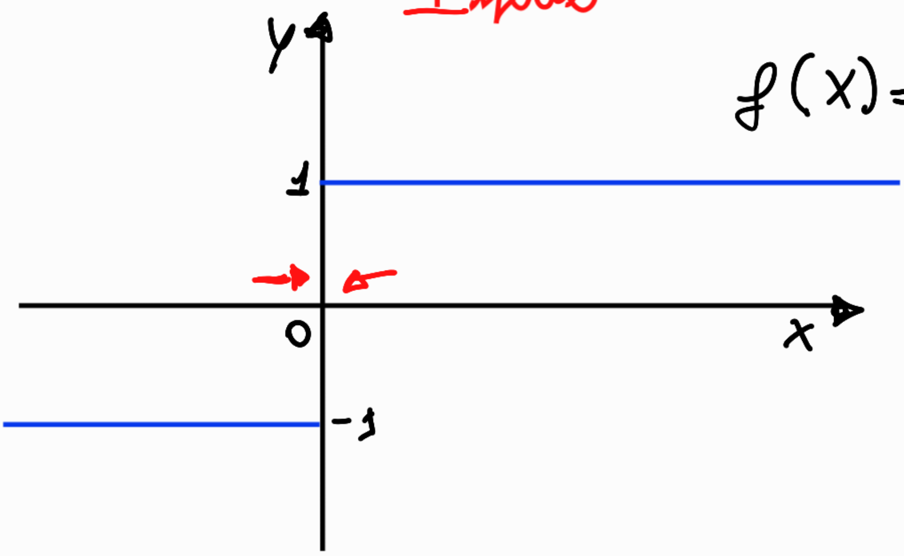
→ di **I specie**:
• $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
• $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
• e $l_1 \neq l_2$

→ di **II specie**: in tutti gli altri casi.

Esempio

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\qquad E[f(x)] =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

I specie



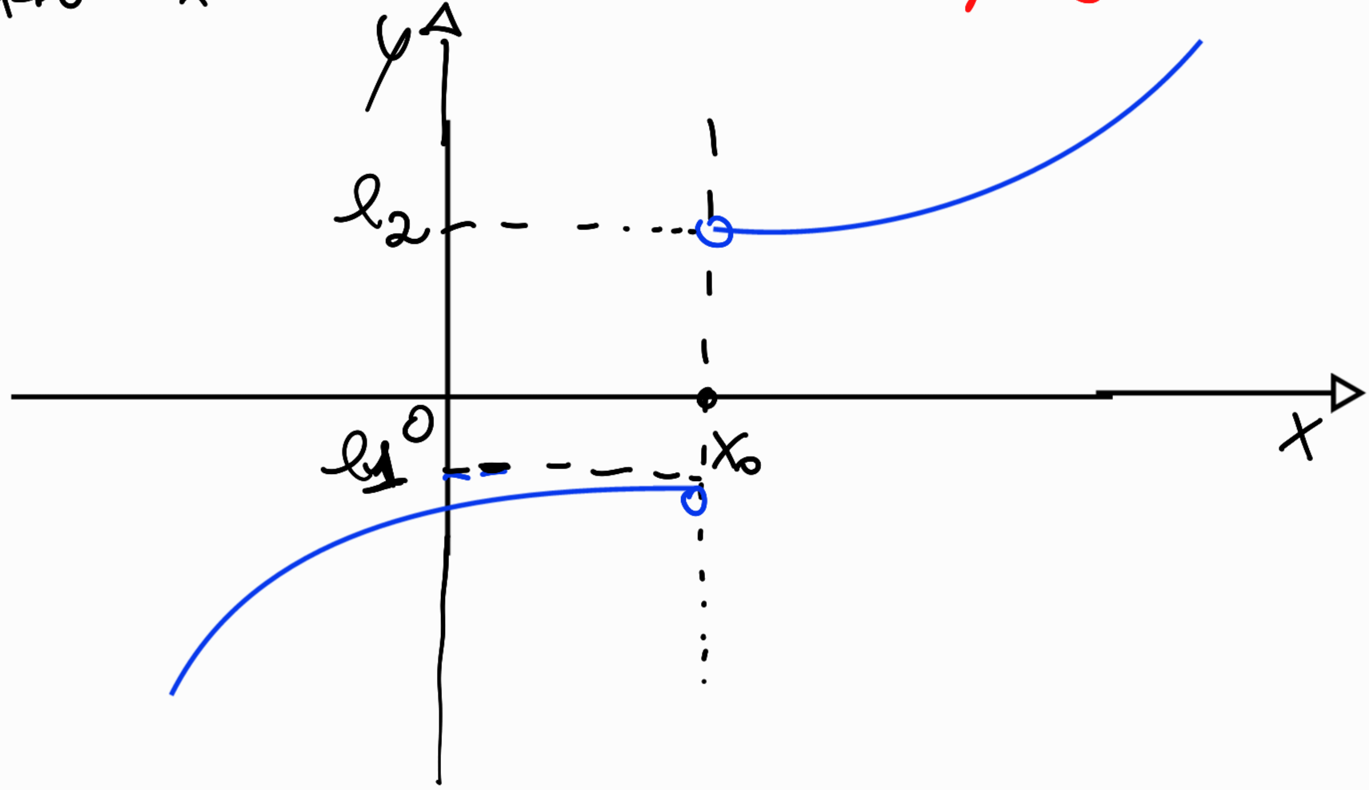
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

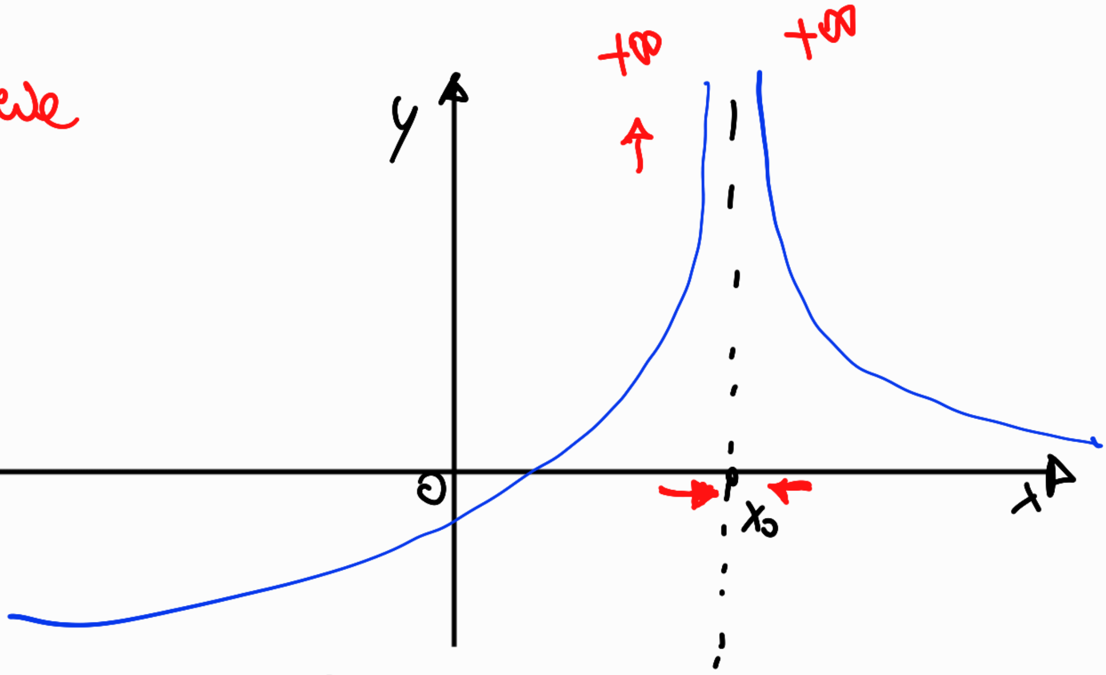
$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \in \mathbb{R}$

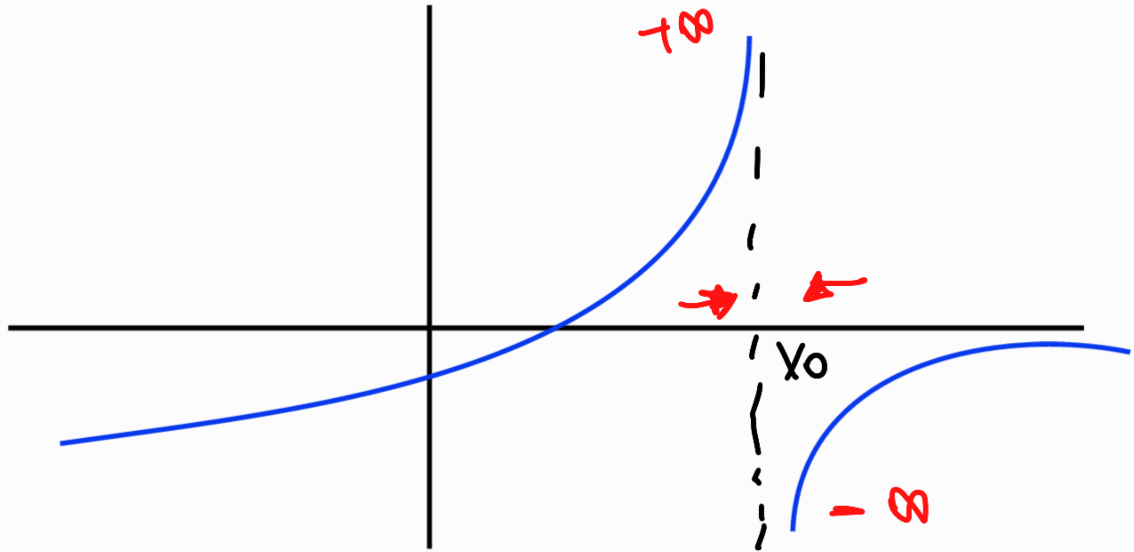
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \in \mathbb{R}$$

I specie



II specie

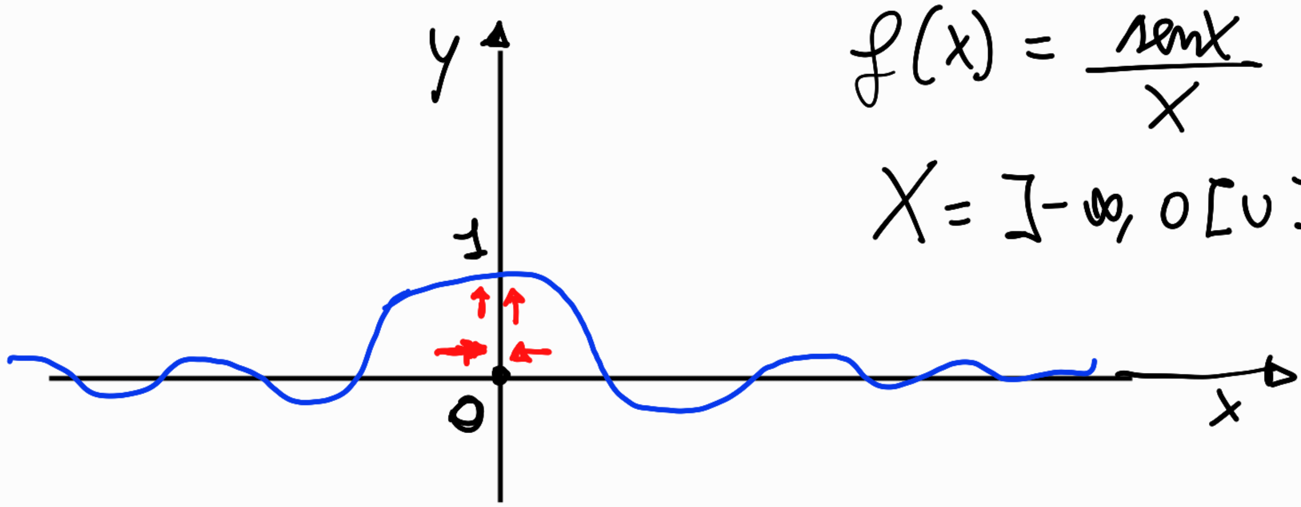




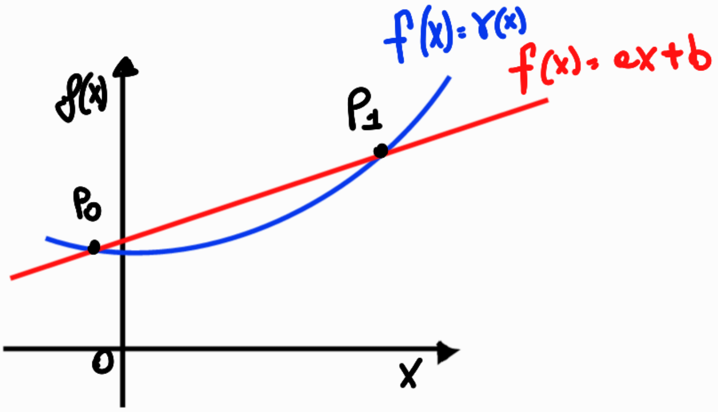
Discontinuità eliminabile

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

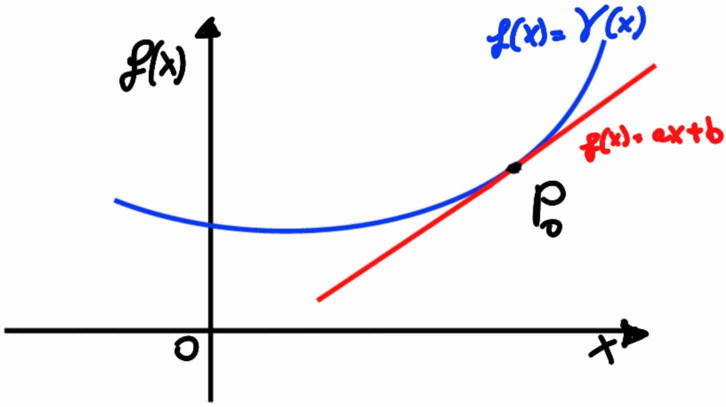
$$X = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$



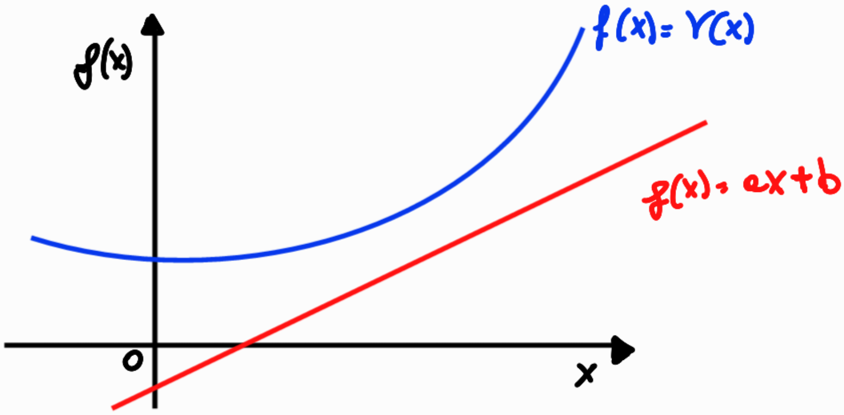
Calcolo differenziale



La retta $f(x)=ax+b$ è <u>secante</u> la curva $f(x)=Y(x)$



La retta $f(x)=ax+b$ è <u>tangente</u> la curva $f(x)=Y(x)$



La retta $f(x)=ax+b$ è <u>esterna</u> alla curva $f(x)=Y(x)$

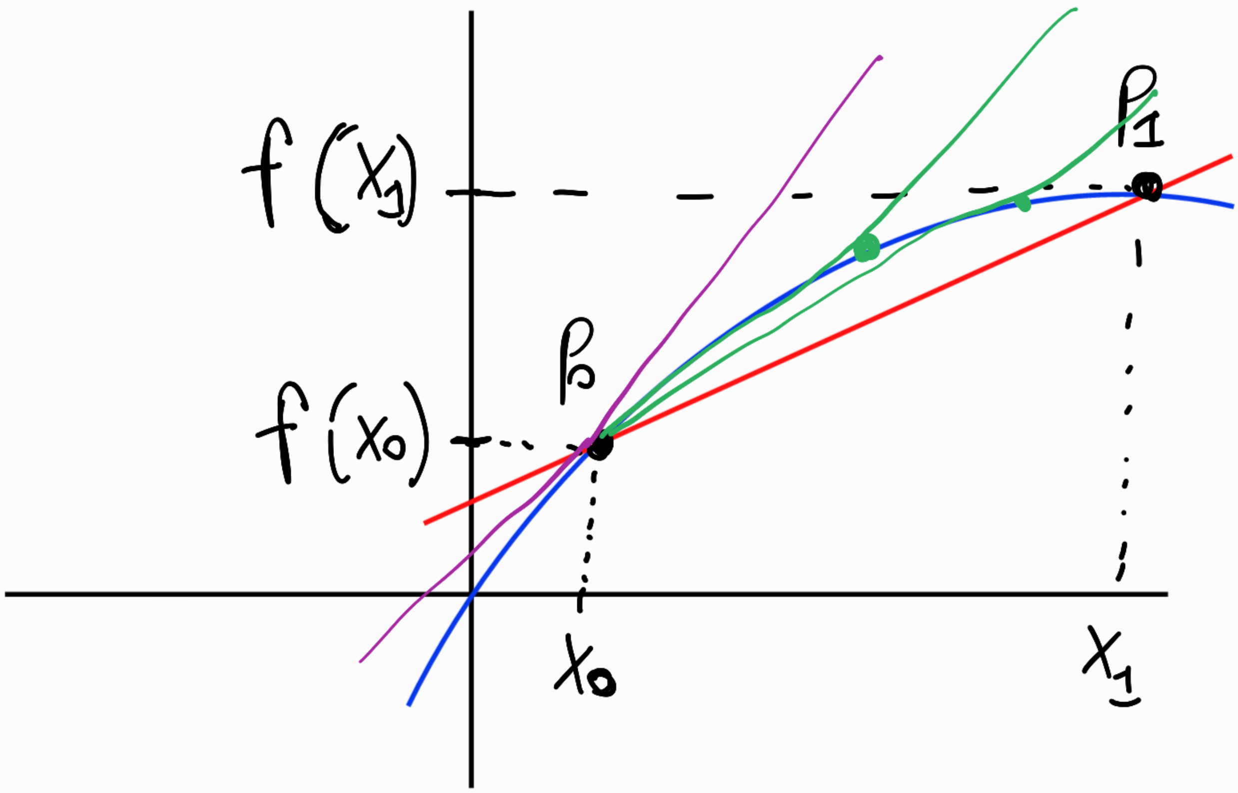
Rapporto incrementale

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Si definisce <u>rapporto incrementale</u> di f relativo al punto x_0 la seguente funzione:

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$E[g_{x_0}(x)] = X - \{x_0\}$$



$$P_0 = (\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, \overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}})$$

$$P_1 = (\overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{x_1}}, \overset{y_1}{\overset{\shortparallel}{f(x_1)}})$$

$$\cancel{a} \cdot \frac{y}{\cancel{a}} = x \cdot a$$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Longleftrightarrow \frac{y - f(x_0)}{\underbrace{f(x_1) - f(x_0)}} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Longleftrightarrow y - f(x_0) = \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \qquad \boxed{y = ax + b}$$

$$y = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{a} \cdot x \underbrace{- \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot x_0 + f(x_0)}_{b}$$

Il rapporto incrementale $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ non è altro che il coefficiente angolare della retta secante la curva $f(x)$ nei punti di ascissa x_0 e x_1.