Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$

Rapporto

- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ non è definito $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{+\infty}{+\infty} \; ; \; \dfrac{+\infty}{-\infty} \\ \dfrac{-\infty}{-\infty} \quad \dfrac{-\infty}{+\infty} \end{cases}$

Se:

$a > 0$

- $\dfrac{a}{+\infty} = 0^+ \simeq 0$
- $\dfrac{a}{-\infty} = 0^- \simeq 0$

$a < 0$

- $\dfrac{a}{+\infty} = 0^- \simeq 0$
- $\dfrac{a}{-\infty} = 0^+ \simeq 0$

Esempio

$$\frac{3}{+\infty} = 0^+$$

$$\frac{+4}{-\infty} = 0^-$$

$$\frac{-5}{+\infty} = 0^-$$

$$\frac{-7}{-\infty} = 0^+$$

Se $a > 0$

- $\dfrac{a}{0^+} = +\infty$

Esempio

$$\frac{5}{0^+} = +\infty$$

- $\frac{a}{0^-} = -\infty$

Se $a < 0$

- $\frac{a}{0^+} = -\infty$

- $\frac{a}{0^-} = +\infty$

$\frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$

$\frac{5}{0^-} = -\infty$

$\frac{-3}{0^-} = +\infty$

$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

- $\frac{0^+}{+\infty} = 0^+$
- $\frac{0^+}{-\infty} = 0^-$
- $\frac{0^-}{+\infty} = 0^-$
- $\frac{0^-}{-\infty} = 0^+$

$\frac{\text{numero}}{0^\pm} = \infty$

$\frac{\text{numero}}{\pm\infty} = 0^\pm$

- $\dfrac{\pm\infty}{0}$ non è definita (C.E.)

$$\frac{\text{numero}}{0^{\pm}} = \infty$$

$$\frac{\text{numero}}{\pm\infty} = 0^{\pm}$$

- $\dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$
- $\dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$
- $\dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$
- $\dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty$

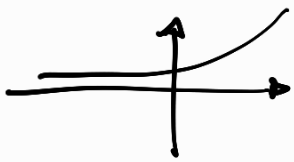
Forme indeterminate

1) $+\infty - \infty$

2) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

3) $0(\pm\infty)$

4) $1^{\pm\infty}$; $(+\infty)^0$; 0^0

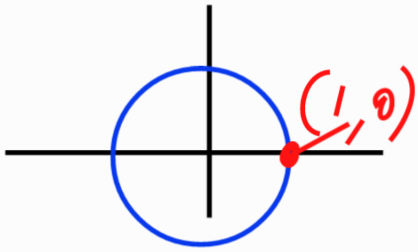


Metodi di calcolo dei limiti

1) Funzioni elementari ✓

2) Limiti notevoli

3) Principio di sostituzione dei polinomi



Limiti notevoli

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

F. trigonometriche

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\overset{0}{\operatorname{sen} 0}}{0} = \frac{0}{0}$ f.i.

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{tg} 0}{0} = \frac{0}{0}$ f.i.

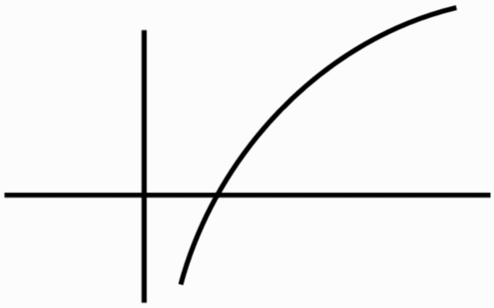
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

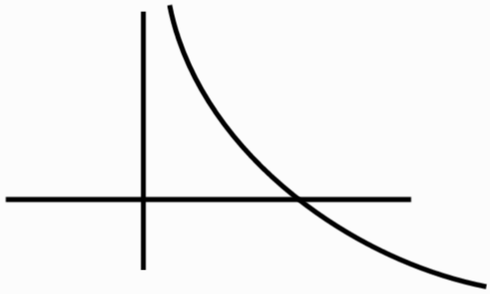
- $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0}$, con $\alpha > 0$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0\,(\pm\infty)$

(la funzione potenza è più "forte" della funzione logaritmo, per cui è quella che ne determina il risultato)

- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0}$, con $\alpha>0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{\pm\infty}{+\infty}$ F.i.





- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e}$ $\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{\log_a 1}{0} = \frac{0}{0}$

CASO PARTICOLARE $\quad a = e$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = \log e = 1}$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a}$ $\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{a^0-1}{0} =$

$$= \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

CASO PARTICOLARE $\quad a = e$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \log e = 1}$

Principio di sostituzione dei polinomi

(Vale solo per $x \to \pm\infty$)

Sia $P_m(x)$ un polinomio di grado m:

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Esempio

$m = 5$

$a_0 = -3$
$a_1 = 2$
$a_2 = 1$
$a_3 = 5$
$a_4 = -4$
$a_5 = 6$

$$P_5(x) = 6x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 1x^2 + 2x^1 - 3$$

$$P_2(x) = \underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{3}}x^2 - \underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{5}}x + \underset{a_0}{\underset{\shortparallel}{1}}$$

Dato $P_m(x)$ di grado m:

- $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} P_m(x) = \lim_{x \to +\infty} a_m x^m}$$

- $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} P_m(x) = \lim_{x \to -\infty} a_m x^m}$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x-2x^3}{x^4-2x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x^3}^{\,1}}{\cancel{x^4}_{\,x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^{3-4}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} x^{\alpha}\cdot x^{\beta}=x^{\alpha+\beta} \\ \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}=x^{\alpha-\beta} \end{gathered}}$$

$$x^{-\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^{-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-2\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$$

$$=-2\cdot\left(\frac{1}{+\infty}\right)=$$

$$=-2\cdot 0^{+}=0^{-}=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x^4-2x^3}{x^2-2x^4+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cancel{x^4}}{-2\cancel{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}(-2)=-2$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x-2x^5}{2x^4-2x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{2x^5}^{\,x}}{\cancel{2x^4}_{\,1}}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} x = -(+\infty) = -\infty$$