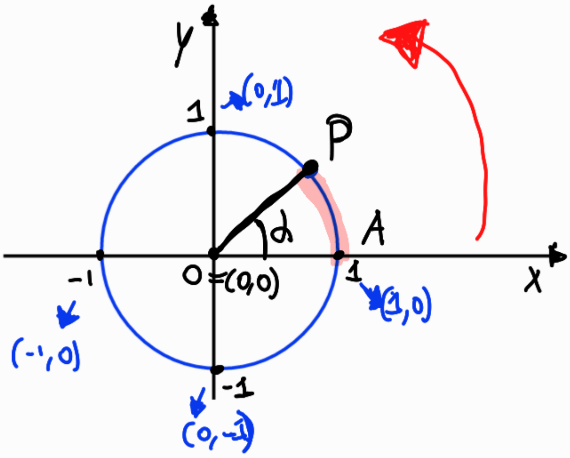
Introduzione alla trigonometria

Misura di angoli



α = alpha

$A\hat{O}P = \alpha$

$A\hat{O}P$ identifica un angolo di ampiezza α.

α può essere misurato:

- in gradi (simbolo "°")
- in radianti (con l'angolo espresso come multiplo della quantità $\pi \simeq 3{,}1428\ldots$) attraverso l'arco AP.

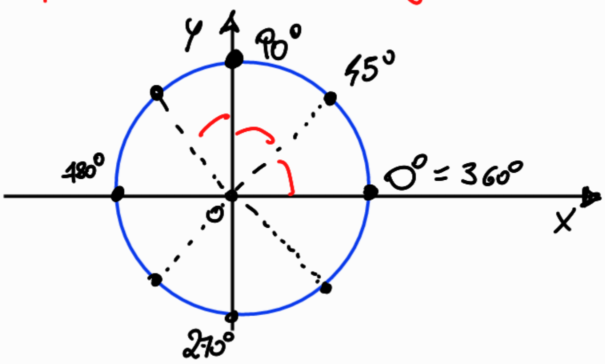
NOTA

La misura dell'angolo α avviene in senso antiorario a partire dalla posizione in cui si trova il punto A.

- Ad A corrisponde un angolo di ampiezza $0 = 0^\circ$.
- Ad un giro completo corrisponde un angolo di ampiezza 360°.

Relazione tra gradi e radianti

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \text{misura in gradi}$$



$$0^\circ \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 0^\circ = 0\pi = 0$$

$$90^\circ \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\cancel{180}} \cdot \cancel{90^\circ} = \frac{1\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$180^\circ \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\cancel{180^\circ}} \cdot \cancel{180^\circ} = \pi$$

$$270^\circ = \frac{\pi}{\cancel{180^\circ}} \cdot \cancel{270^\circ} = \frac{3}{2}\pi$$

Detto α l'angolo espresso in radianti, vale la seguente relazione:

$$\boxed{\pi : 180^\circ = \alpha : \text{angolo misurato in gradi}}$$

$$\alpha = \frac{\pi \cdot \text{misura in gradi}}{180^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\text{misura in gradi}}$$

$$\frac{\alpha}{\text{misura in gradi}} = \frac{\pi}{180^\circ} \iff \frac{\alpha \cdot \frac{1}{\text{misura in gradi}}}{\frac{1}{\text{misura in gradi}}} = \frac{\frac{\pi}{180^\circ}}{\frac{1}{\text{misura in gradi}}}$$

$$\boxed{\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \qquad x = \frac{b}{a}}$$

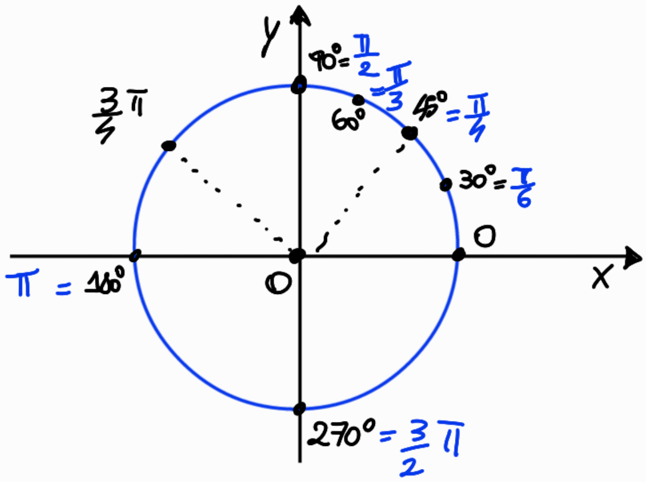
$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{180^\circ}}{\frac{1}{\text{misura in gradi}}} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \text{misura in gradi}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \text{misura in gradi}}$$

$45° \to \alpha = \frac{\pi}{\cancel{180°}_4} \cdot \cancel{45°}^1 = \frac{\pi}{4}$

$30° \to \alpha = \frac{\pi}{\cancel{180°}_6} \cdot \cancel{30°}^1 = \frac{\pi}{6}$

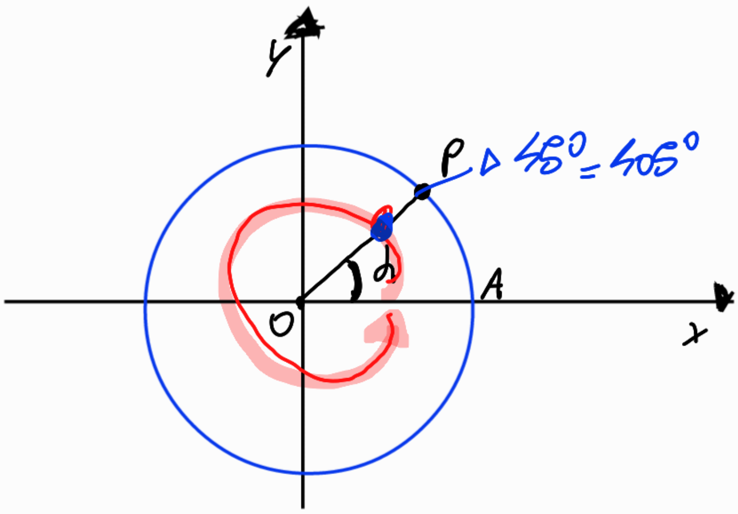
$60° \to \alpha = \frac{\pi}{\cancel{180°}_3} \cdot \cancel{60°}^1 = \frac{\pi}{3}$



Misura Principale di un angolo

- α e $\alpha + 2\pi$ identificano un angolo di pari ampiezza

- α e $\alpha + 4\pi$ identificano un angolo di pari ampiezza



Esempio

$\alpha = 45°$ $\qquad \alpha + 2\pi = 45° + 360° = 405°$

$\alpha = 45°$ $\qquad \alpha + 4\pi = 45° + 720° = 765°$

In generale:

- $\underline{\alpha}$ e $\underline{\alpha + 2k\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}$, identificano un angolo di pari ampiezza.

- Di questi angoli, l'angolo $\alpha \in [0, 2\pi[$ è detto misura principale.
$[0°, 360°[$

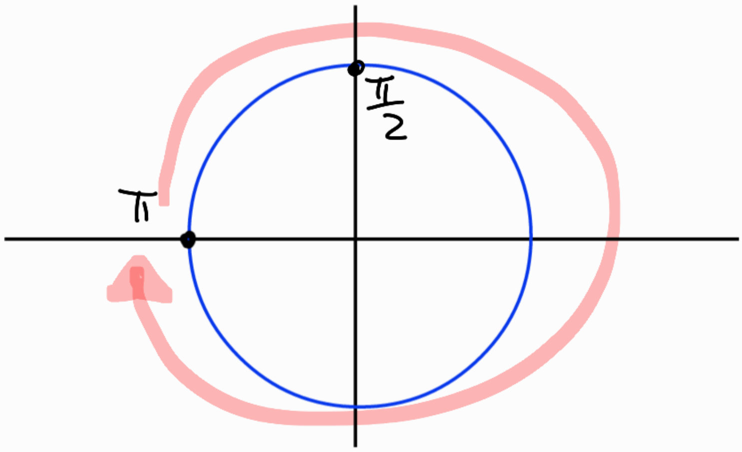
Esempio

0 e 2π ; 0 è la misura principale

3π e π ; π // //

π e $-\pi$; π // //

$$-\pi = \pi - 2\pi$$



$\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ è la misura principale

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi + 4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

Funzioni trigonometriche

1) coseno
2) seno
3) tangente

} funzioni elementari

4) cotangente } funzione composta

(Funzioni inverse)

5) arcocoseno
6) arcoseno
7) arcotangente

} funzioni elementari

8) arcocotangente } funzione composta

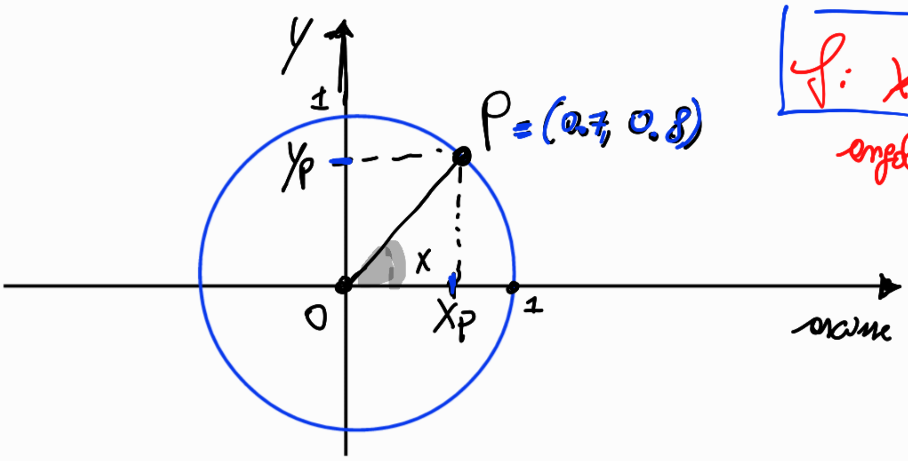
Funzione di rapporto

Sia f una funzione (di rapporto) che all'angolo $x \in \mathbb{R}$ (espresso in radianti) associ un punto P sulla circonferenza di raggio unitario e centro l'origine degli assi, ossia la circonferenza trigonometrica (o goniometrica):

$$\boxed{f: x \in \mathbb{R} \to P \in \mathcal{C}}\ , \text{ dove}$$

- $\mathcal{C}$ è la circonferenza trigonometrica,

$P \in \mathbb{R}^2$ e $P = (x_P, y_P)$.



$$\boxed{f: x \to P}$$

angolo $\quad$ punto

COSENO

$\cos x = x_P$

SENO

$\sin x = y_P$

TANGENTE

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \iff \tan x = \frac{y_P}{x_P}, \quad \text{con } \cos x \neq 0$$

COTANGENTE

$\cot g\,x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \iff \cot g\,x = \frac{x_p}{y_p}$, com $\operatorname{sen} x \neq 0$