Funzioni numeriche $\quad f: X \to Y$

f è una funzione numerica se dominio X e codominio Y sono entrambi insiemi numerici.

Esempio

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (successioni)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Estremi di un insieme

- min/max
- inf/sup

Minimo di un insieme

Sia $A \subset \mathbb{R}$ (in senso stretto)

Il minimo di un insieme A è quell'elemento, se esiste, di A indicato con $\min A$ tale che:

$$\boxed{\min A \leq x \qquad \forall x \in A}.$$

Esempio

$$A = \{2, 3, -1, 5\} \qquad \min A = -1$$

Massimo di un insieme

Sia $A \subset \mathbb{R}$.

Il massimo di un insieme A è quell'elemento, se esiste, di A indicato con $\max A$ tale che:

$$\boxed{\max A \geq x \qquad \forall x \in A.}$$

Esempio dato A, $\max A = 5$

Esempio

$$A = [-1, 5] \cup \{7\}$$

$$\min A = -1$$

$$\max A = 7$$

$$A = [-1, 5[$$

$$\min A = -1$$

$$\nexists \max A$$

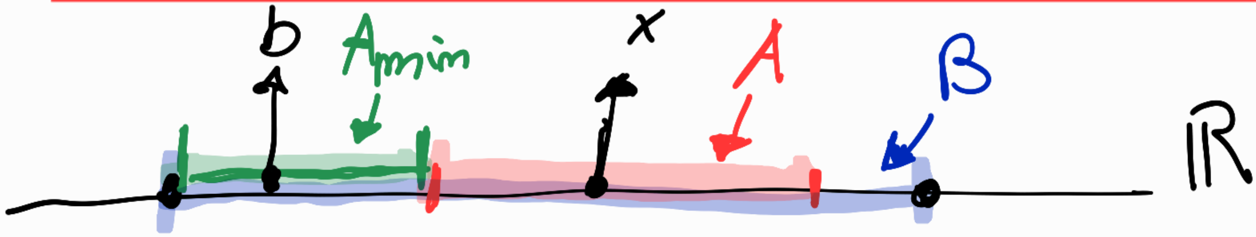
$I =]a, b[$

Estremo inferiore (di un insieme) di A

Sia $A \subset B \subseteq \mathbb{R}$.

- Si definisce *insieme dei minoranti* dell'insieme A l'insieme $\boxed{A_{min}}$ tale che:

$$\boxed{A_{min} = \{ b \in B : b \le x \, , \ \forall x \in A \}}.$$



$$b \in B : b \le x \qquad \forall x \in A$$

- Si definisce *estremo inferiore* di A il massimo dei minoranti.

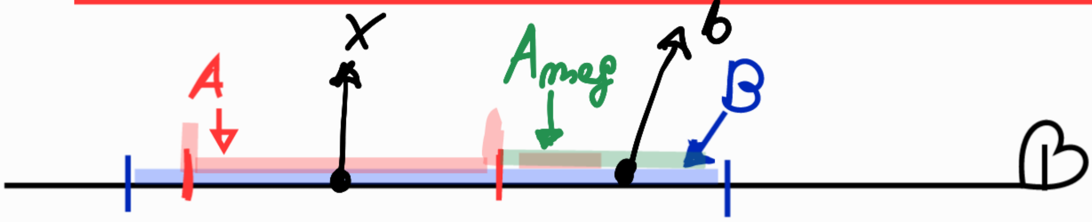
$$\boxed{\inf A = \max A_{min}}$$

Estremo superiore

Sia $A \subset B \subseteq \mathbb{R}$.

- Si definisce insieme dei maggioranti di A l'insieme $\boxed{A_{mag}}$ tale che:

$$\boxed{A_{mag} = \{ b \in B : b \geq x \,, \forall x \in A \}}.$$



$$x \leq b$$

$$b \in B : b \geq x \,, \quad \forall x \in A$$

- L'estremo superiore di A è il minimo dell'insieme dei maggioranti:

$$\boxed{\sup A = \min A_{mag}}$$

NOTA

- $A_{min} \neq \emptyset \Rightarrow A$ è limitato inferiormente

- $A_{min} = \emptyset \Rightarrow$ A è illimitato inferiormente

- $A_{mag} \neq \emptyset \Rightarrow$ A è limitato superiormente
- $A_{mag} = \emptyset \Rightarrow$ A è illimitato superiormente

NOTA (su Estremo inferiore e superiore di un insieme)

In generale, si assume che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ sia dotato di estremo inferiore ed estremo superiore.

In particolare: sia $A \subseteq \mathbb{R}$

- Se A è limitato inferiormente $\Rightarrow$ $\boxed{\inf A \in \mathbb{R}}$ (è finito)
- Se A è illimitato inferiormente $\Rightarrow$ $\boxed{\inf A = -\infty}$ *
- Se A è limitato superiormente $\Rightarrow$ $\boxed{\sup A \in \mathbb{R}}$ (è finito)
- Se A è illimitato superiormente $\Rightarrow$ $\boxed{\sup A = +\infty}$ *

* È una convenzione perché $A_{min} = \emptyset$ e $A_{mag} = \emptyset$

- A è insieme limitato se A è limitato sia super. che inferiormente.

- A è insieme illimitato o è ill. inferiormente o è illimitato superiormente.

• Estremi di una funzione (Estremi dell'insieme codominio Y)

min/max

inf / sup

• min/max assoluti

• min/max relativi

$$X \to Y$$

$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \qquad Y = \{4, 1, 0, 1, 4\}$$

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$$f : x \in X \to y = x^2$$

$f(-2) = 4$

$f(-1) = 1$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(2) = 4$

$x = 0$ p.to min assoluto

$\min f(x) = f(0) = 0$ è il min assoluto di f

Minimo assoluto (di una funzione)

$$f : x \in X \to y \in Y$$

Il minimo assoluto di f è quell'elemento $\boxed{\min_{x \in X} f(x)}$ tale che:

$$\boxed{\min_{x\in X} f(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in X}.$$

Il punto $x_0 \in X$ in cui si realizza il minimo assoluto, ossia x_0 tale che $\boxed{f(x_0) = \min_{x\in X} f(x)}$, è detto punto di minimo assoluto.

NOTA

$x_0 \in X$ (dominio) $\to$ x_0 p.to min assoluto

$f(x_0) = \min f(x) \in Y$ (codominio) $\to$ min assoluto

Massimo assoluto di una funzione

$f : x \in X \to y \in Y$

Il massimo assoluto di una funzione è quell'elemento, se esiste, indicato con $\max_{x\in X} f(x)$ tale che:

$$\boxed{\max_{x\in X} f(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in X}.$$

Il punto $x_0 \in X$ in cui si realizza il massimo assoluto, ossia x_0 tale che $\boxed{f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)}$,

è detto punto di massimo assoluto.

NOTA

$x_0 \in X$ (dominio) $\longrightarrow$ p.to max ass.

$f(x_0) = \max_{x \in X} f(x) \in Y$ (codominio) $\longrightarrow$ max ass.

ULTERIORE NOTA

- $\min_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x)$, se esistono, sono unici.

- I punti $x_0 \in X$ in cui realizza $\min_{x \in X} f(x)$ possono essere più di uno.

- I punti $x_0 \in X$ in cui realizza $\max_{x \in X} f(x)$

possono essere più di uno.