Applicazione di una funzione

$$f : x \in X \to y = f(x) \in Y$$

Una funzione matematica serve per risolvere un problema matematico:

problema $\to$ diretto

problema $\to$ indiretto

Il problema diretto sussiste quando, dato un elemento $x \in X$, si vuole determinare l'immagine o il valore della funzione $f(x) = y \in Y$.

Il problema indiretto sussiste quando, dato un valore $y \in Y$, si vuole determinare, se esiste, l'elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

Esempio

Consideriamo un problema di investimento.

$$f : x \in X \to y = f(x) \in Y$$

X = tempo

$X = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

C_0 = capitale al tempo $x = 0$ investito

C_x = capitale al tempo t

$\searrow C_x = y = f(x) = f(\text{tempo})$

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R}^+ \to C_x = f(x) \in \mathbb{R}}$$

C_0

$$\boxed{C_x = \underbrace{C_0} + \underbrace{C_0 \cdot i x}}$$, dove:

- i è il tasso d'interesse
- x è il tempo
- C_0 il capitale investito al tempo 0
- C_x il valore del capitale al tempo x

$$\boxed{C_x = C_0 (1 + i x)}$$

$$C_x = f(x) = \underbrace{C_0 \cdot (1 + i x)}_{\text{forma funzionale}}$$

dove C_0 e i sono parametri

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R}^+ \to C_x = f(x) = C_0 (1 + i x) \in \mathbb{R}}$$

<u>Caso</u>

$C_0 = 100€$; $i = 5\% = 0.05$

<u>Problema diretto</u>: quanto vale C_x dopo $x = 5$ (anni)?

$$C_5 = f(x=5) = \underset{\text{in } x=5}{C_0(1+ix)} = \underset{\text{in } x=5}{100\,€\,(1+0.05\cdot x)} =$$

$$= 100\,€\,(1+0.05\cdot 5) = 100\,€ \cdot 1.25 = 125\,€$$

<u>Problema indiretto</u>: quanti anni occorrono affinché il capitale investito C_0 raddoppi?

$$C_x = 2\cdot C_0 = 2\cdot 100\,€ = 200\,€$$

$$C_x = C_0(1+ix) \qquad \text{con } C_x = 200$$

$$\boxed{C_x = 100\,(1+0.05x)}$$

$$200 = 100(1+0.05x) \qquad \text{voglio la } x$$

$$200 = 100 + 5x$$

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{100}{5} \qquad x = 20 \text{ (anni)}$$

Elementi di topologia

1) Intorno
2) Punto di accumulazione
3) Punto isolato

Definiamo l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ ("$\mathbb{R}$ ampliato") il seguente insieme:

$$\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}$$

1) Intorno

Dato un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si definisce intorno di x_0 un intervallo $I \in \underbrace{I(x_0)}_{\text{"famiglia degli intorni"}}$.

In particolare:

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ (valore finito) $\Rightarrow$ $\boxed{I = \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[}$, $\varepsilon > 0$

(intervallo aperto limitato di centro x_0)

quantità piccola a piacere ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)

• se $x_0 = +\infty \Rightarrow I =]a, \underset{\substack{\shortparallel \\ x_0}}{+\infty}[\;, \; \underline{a \in \mathbb{R}}$

(intervallo aperto illimitato superiormente)

$\Downarrow$

(intorno di $+\infty$)

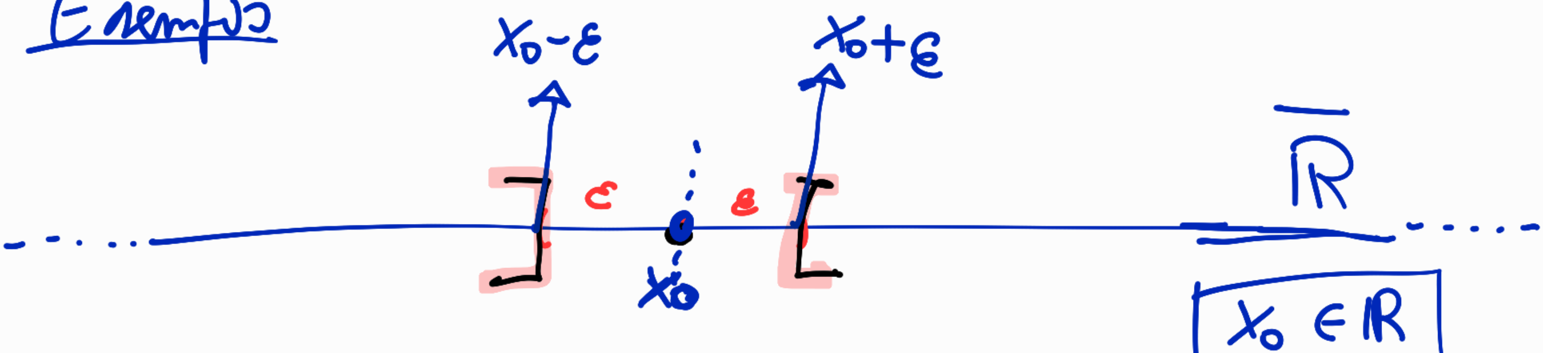
• se $x_0 = -\infty \Rightarrow I =]\underset{\substack{\shortparallel \\ x_0}}{-\infty}, b[\;, \; b \in \mathbb{R}$

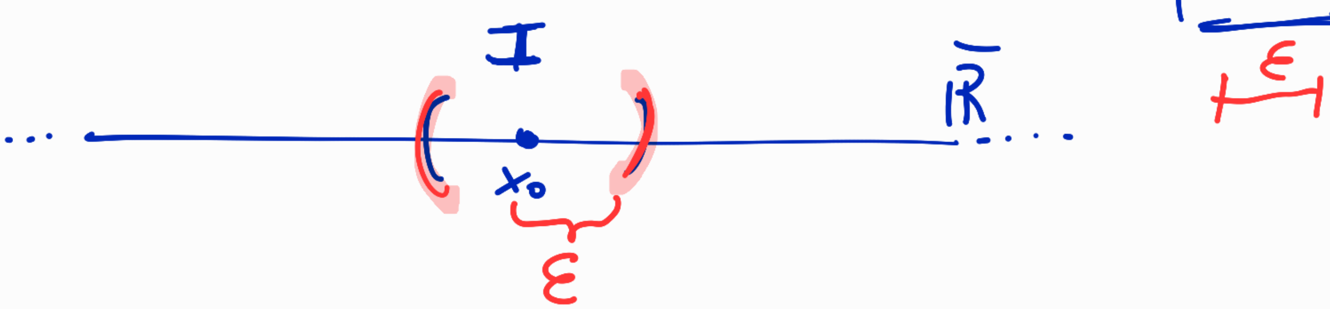
(intervallo aperto illimitato inferiormente)

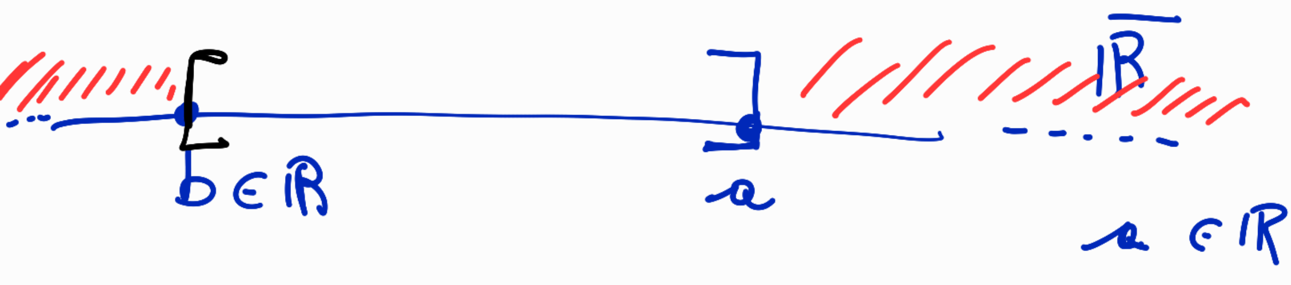
$\Downarrow$

(intorno di $-\infty$)

<u>Esempio</u>







2) Punto di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per A se accade che:

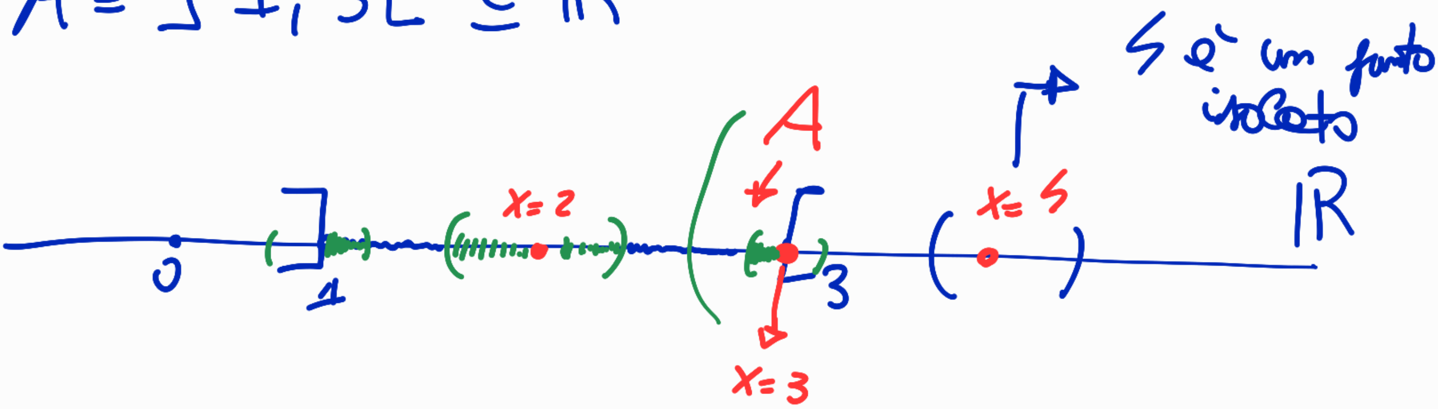
x_0 è finito

$$\boxed{\forall I \in \mathcal{I}(x_0) : A \cap \left(I - \{x_0\}\right) \neq \emptyset}$$

In altre parole, x_0 è di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene almeno un punto di A.

Esempio

$A =]1, 3[\subseteq \mathbb{R}$



3) Punto isolato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto x_0 è punto isolato per A se:

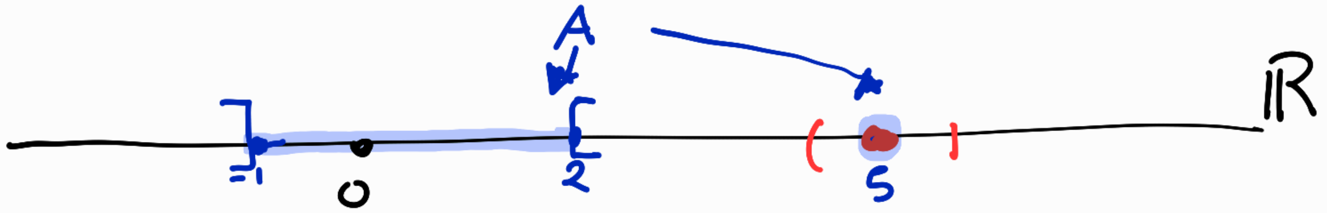
$$\boxed{\exists I \in \mathcal{I}(x_0) : A \cap \left(I - \{x_0\}\right) = \emptyset}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\exists I \in \mathcal{I}(x_0) : A \cap I = \{x_0\}}$$

Esempio

$$A =]-1, 2[\; \cup \; \{5\}$$



$\forall \; x \in [-1,2] \Rightarrow x$ è di accumulazione per A

$x = 5 \in A$

NOTA 1

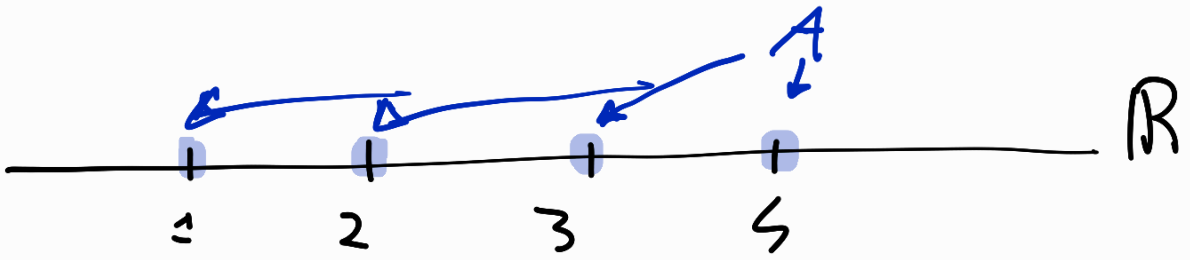
- $x = 0 \in A$ ed è di accumulazione per A
- $x = -1 \notin A$ ma è di accum. per A
- $x = 5 \in A$ ma non è di accum. per A.

NOTA 2

Possono esistere insiemi numerici privi di punti di accumulazione.

Esempio

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$$



A è un insieme discreto. $\Rightarrow$ A contiene solo punti isolati.