Funzioni

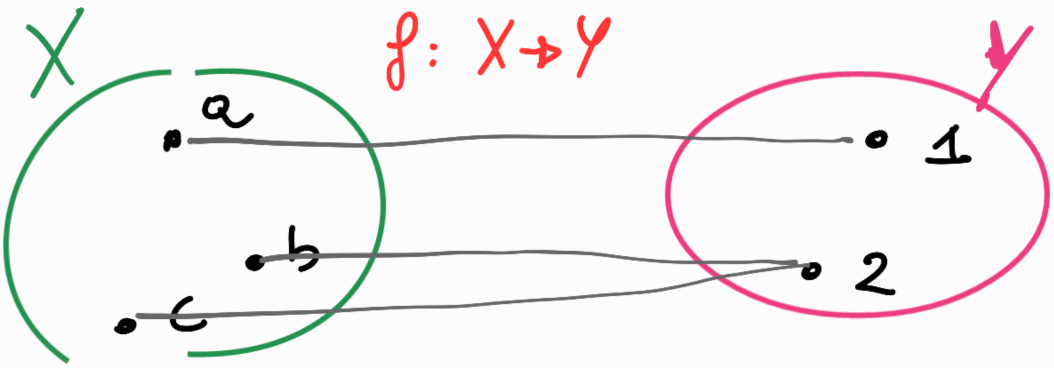
Definizione di funzione suriettiva, iniettiva, biunivoca, inversa e composta.

1) Funzione suriettiva

$$f : x \in X \to y = f(x) \in Y$$

f è suriettiva se ogni elemento y del codominio Y è immagine di almeno un elemento x del dominio X.

$$\forall y \in Y \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq X \\ f^{-1}(\{y\}) = \{a, b, \dots\} \subseteq X \end{cases}$$

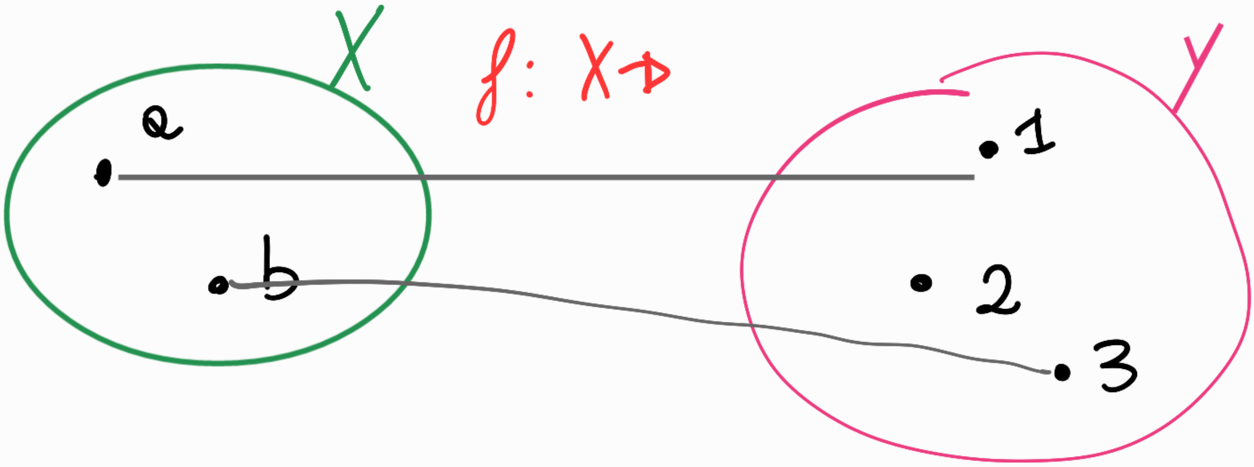


2) Funzione iniettiva

$$f : x \in X \to y = f(x) \in Y$$

f è iniettiva se ad ogni elemento y del codominio Y corrisponde al più un elemento x del dominio X.

$$\forall y \in Y \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \\ f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq X \end{cases}$$

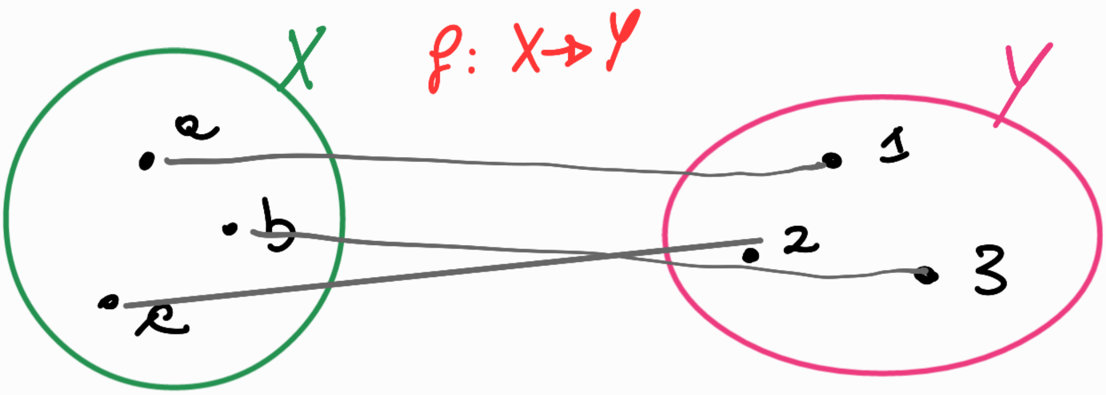


F. biunivoca

$f : x \in X \to y = f(x) \in Y$

f è biunivoca (biiettiva) se è sia suriettiva che iniettiva.

$$\forall y \in Y \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq X$$



Funzione inversa

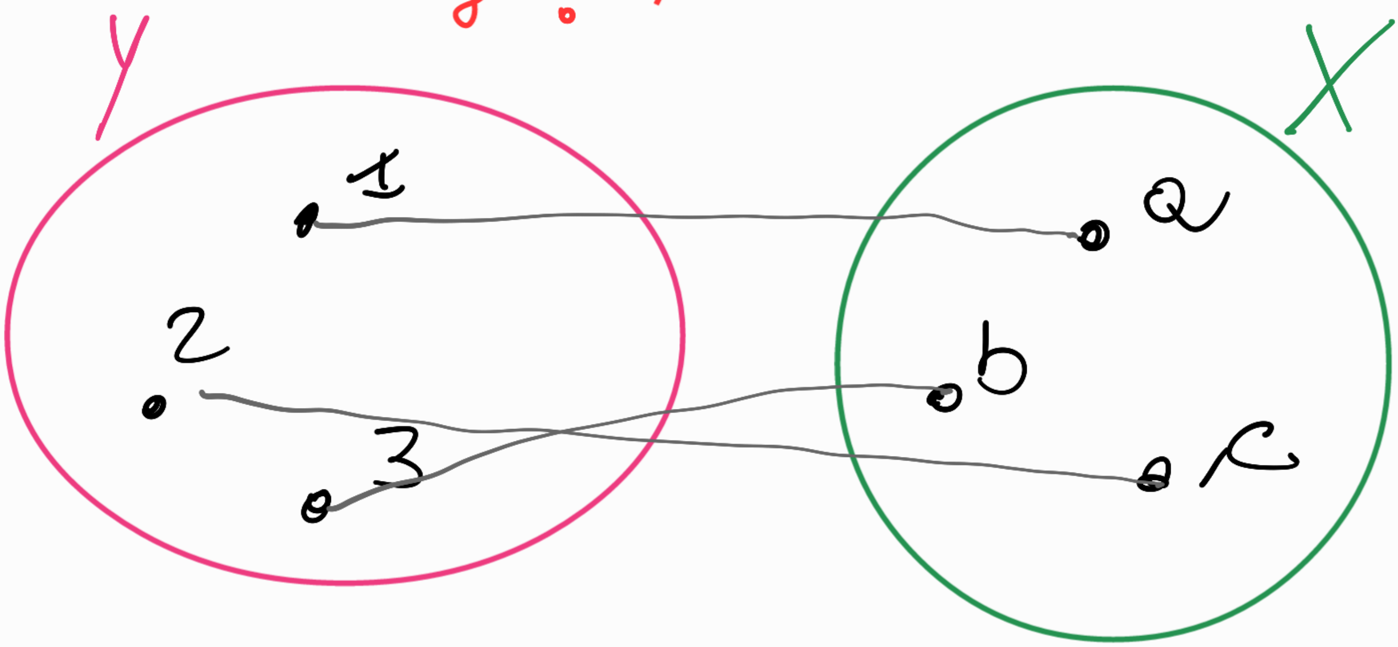
$$\boxed{f : x \in X \to y = f(x) \in Y}$$

f è invertibile se e solo se f è biunivoca.

La funzione inversa sarà:

$$\boxed{f^{-1} : y \in Y \to x = f^{-1}(y) \in X}$$

$f^{-1} : Y \to X$



Esempio

$f(x) = x^3$ $\qquad$ f è biunivoca in tutto $\mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

$x = 2 \qquad f(2) = 2^3 = 8$

$y = 8 \qquad f^{-1}(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

F. composta

Siano X, Y, Z tre insiemi.

$f : X \to Y$

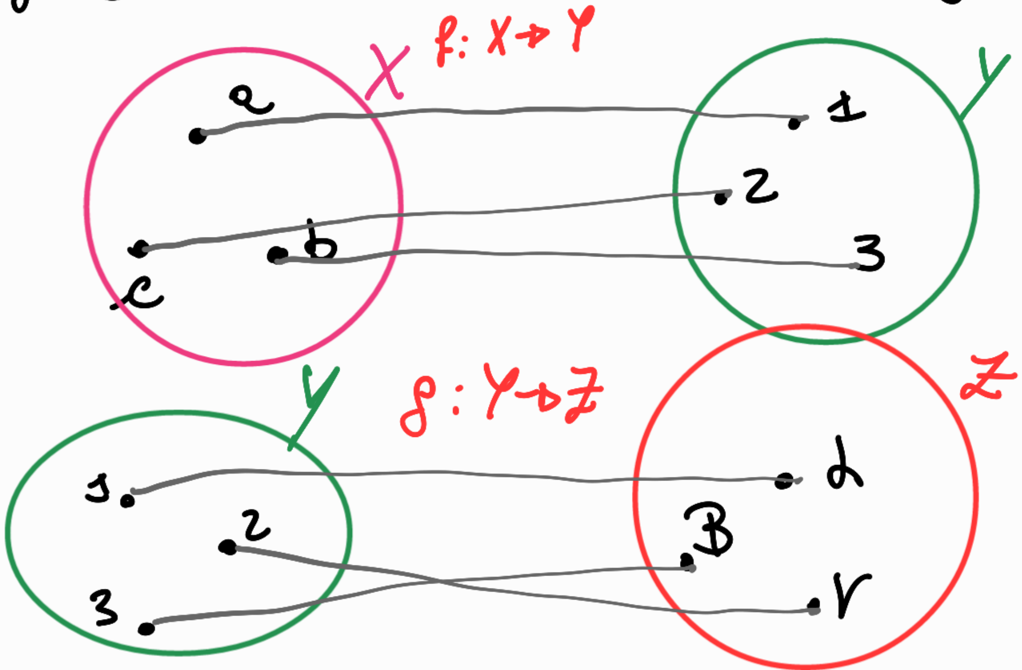
$g : Y \to Z$

La funzione composta $\boxed{g \circ f}$ ("g composto f") è una funzione tale che:

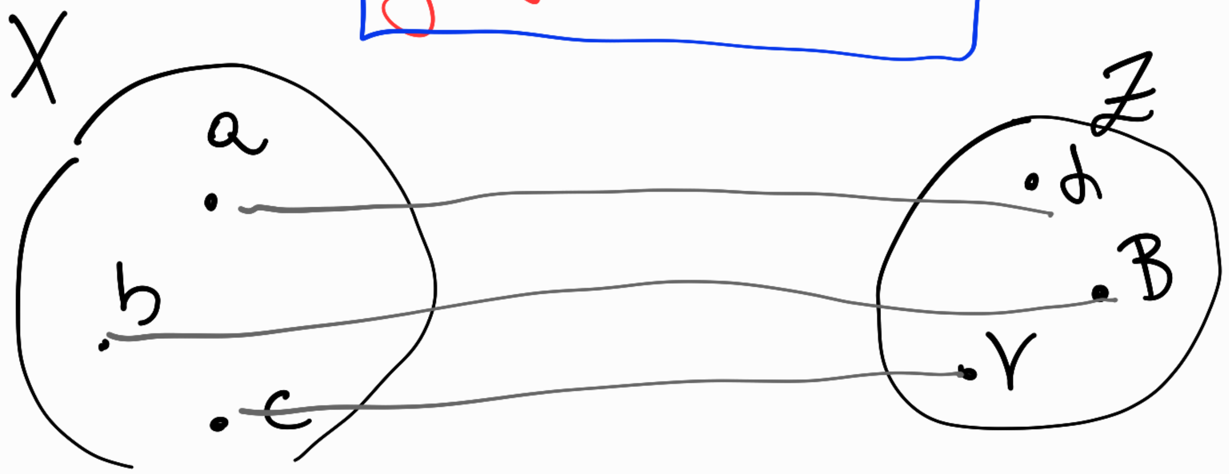
$$\boxed{g \circ f : X \to Z}$$

NOTA

Posso definire la composta solo se il codominio di f coincide con il dominio di g.



$$\boxed{g \circ f: X \to Z}$$



f. composta

$$f: x \in X \to y = f(x) \in Y$$

$$g: y \in Y \to z = g(y) \in Z$$

$$g \circ f: x \in X \to z = g(\underbrace{y}_{f(x)}) = g(f(x)) \in Z$$

NOTA

Se $\boxed{g \circ f}$ è definibile (ossia quando il codominio di f è uguale al dominio di g), non è detto che anche $\boxed{f \circ g}$ sia definibile.

In generale, $\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$.

$f: X \to Y$

$g \circ f: X \to Z$

$g: Y \to Z$

~ . ~ . ~ . ~ . ~ .

$\boxed{f \circ g \, ?}$ è definibile se $X = Z$

solo se il codominio di g coincide con il dominio di f.

$g: Y \to Z$

$f: X \to Y$

Esempio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f$

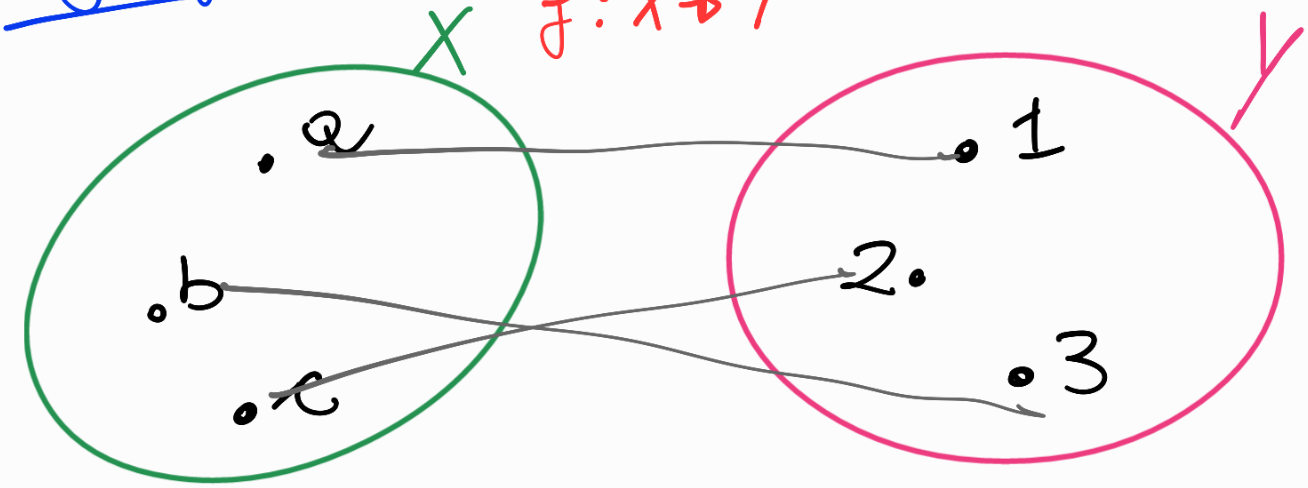
$f \circ g$

Esempio $\boxed{g \circ f \quad e \quad f \circ g}$

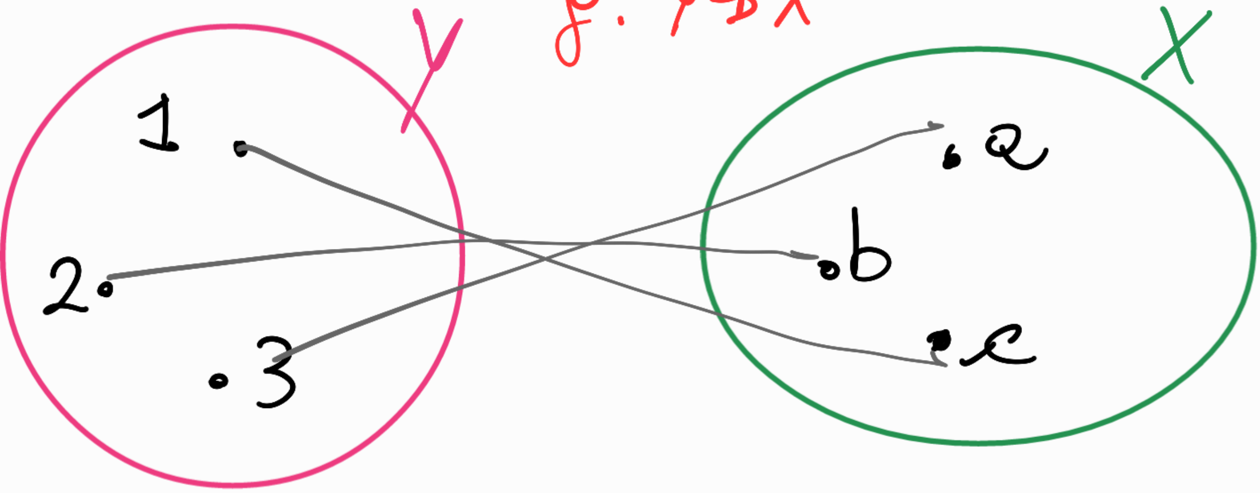
$$\boxed{\begin{array}{l} f: X \to Y \\ g: Y \to Z = X \end{array}} \implies \boxed{\begin{array}{l} f: X \to Y \\ g: Y \to X \end{array}}$$

$g \circ f$

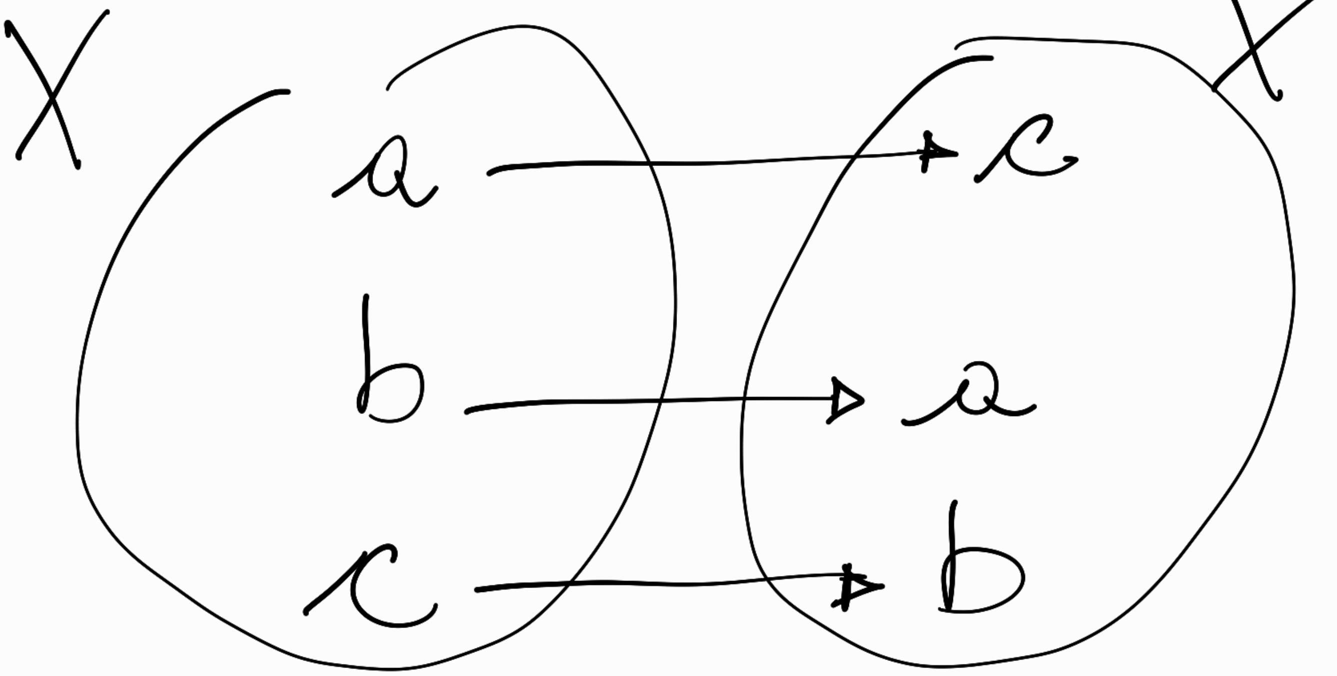
$f : X \to Y$



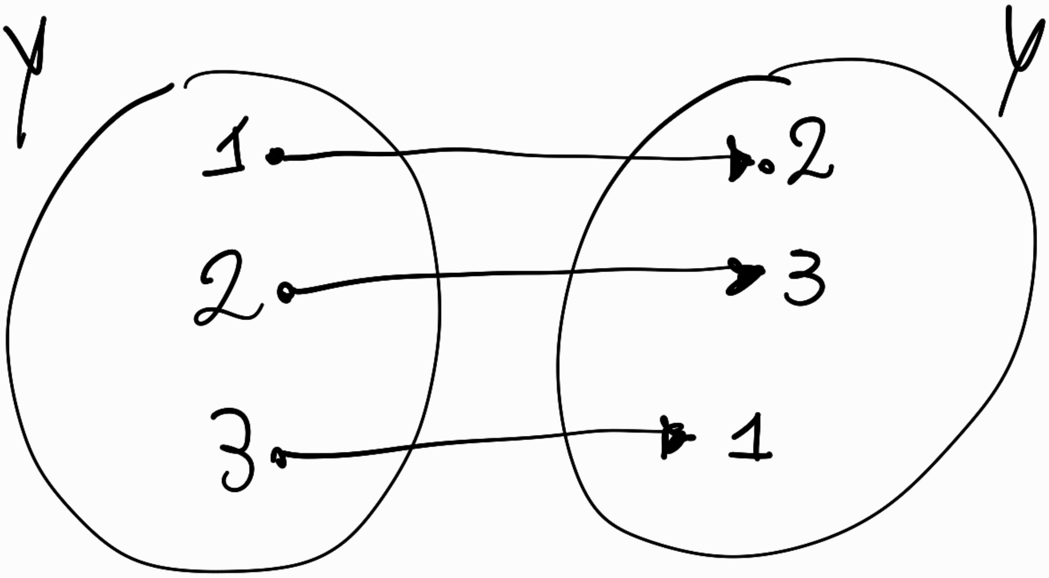
$g : Y \to X$



$g \circ f : X \to X$



$f \circ g : Y \to Y$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esempio

$f : x \in \mathbb{R} \to \boxed{y = f(x)} = 2x \in \mathbb{R}$

$g : y \in \mathbb{R} \to t = g(y) = y + 1 \in \mathbb{R}$

- $g \circ f : x \in \mathbb{R} \to \underset{\overset{\parallel}{2x}}{y} + 1 = 2x + 1$

- $g \circ f = g(f(x)) = 2x + 1$ (f. composta)

$f: x \in \mathbb{R} \to y = f(x) = x + 1 \in \mathbb{R}$

$g: y \in \mathbb{R} \to A = g(y) = 2y \in \mathbb{R}$

- $g \circ f: x \in \mathbb{R} \to 2\underset{(x+1)}{y} = 2(x+1) = 2x+2$

Esempio (sulla composta)

$g(f(x)) = \sqrt{x^3} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^3}$

$g(f(x)) = \dfrac{1}{x+2} \longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$g(f(x)) = e^{\cos x}$

$g(f(x)) = \log \sqrt{x}$