Equazioni di II grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad (*)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

Se $a, b, c \neq 0 \Rightarrow$ l'eq $(*)$ si dice completa.

Se $b = 0$ e $a, c \neq 0 \Rightarrow$ l'eq. $(*)$ si dice pura e diventa: $\boxed{ax^2 + c = 0}$.

Se $c = 0$ e $a, b \neq 0 \Rightarrow$ eq $(*)$ si dice spuria e diventa: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Soluzioni

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ l'eq. $(*)$ non ha soluzioni
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ l'eq. $(*)$ ha una (sola) soluzione:

$$\boxed{x^* = \frac{-b}{2a}}$$

• $\Delta > 0 \Rightarrow$ l'eq. (*) ha 2 soluzioni distinte:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 < x_2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

CASI PARTICOLARI

• $\Delta > 0$ e $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$ (eq. pura)

$a, c \neq 0$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$(\Delta = -4ac \neq 0)$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2 + 2 = 0 \\ x^2 = \pm\sqrt{-2} \end{array}\right)$$

$\Delta < 0 \quad \emptyset$

• $\Delta > 0$ e $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$ (eq. spuria)

$a, b \neq 0$

$$\Delta = b^2 - \cancel{4ac}$$

$\cancel{4ac} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = b^2 > 0$$

$$x(ax+b) = 0$$

$$x = 0 \qquad ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Soluzioni $\quad x_1 = 0 \quad$ e $\quad x_2 = -\frac{b}{a}$

Esempi

- $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 < 0$$

L'eq. non ha soluzione.

- $x^2 - 8x + 16 = 0 \iff \boxed{(x-4)^2 = x^2 + (-4)^2 + 2(x)(-4) = x^2 + 16 - 8x}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16) = \cancel{64} - \cancel{64} = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\cancel{-8}^{\,4}}{\cancel{2}\,1} = 4$$

oppure $\quad x^2 - 8x + 16 = 0 \iff (x-4)^2 = 0 \iff$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

- $x^2 + x - 12 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Soluzioni: $x=-4$ e $x=3$.

- $x^2-3=0 \iff x^2=3 \iff x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ $\quad \Delta=-4ac$ $=-4(1)(-3)$

- $2x^2+5=0 \iff 2x^2=-5 \iff x^2=\frac{-5}{2}$ $\quad (\Delta<0)$

Soluzione: $\emptyset$ $\quad (\Delta=-4ac=-4(2)(5)=-40<0)$

$$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\pm\sqrt{12}}{2}=\pm\frac{\sqrt{4\cdot 3}}{2}=\pm\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{2}$$

$$=\pm\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$=\pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}$$

Disequazioni di II grado

(forma canonica)

1) $ax^2+bx+c>0$

2) $ax^2+bx+c\geq 0$

3) $ax^2+bx+c<0$

4) $ax^2+bx+c\leq 0$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$a>0$ (se $a<0$, cambia il segno al I e al II membro e a tutta la disequazione)

1) $\boxed{ax^2+bx+c>0}$ (*)

- $\boxed{\Delta<0}$ $\Rightarrow$ la disequazione (*) è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\boxed{\Delta=0}$ $\Rightarrow$ l'eq. associata ha 1 sola soluzione x^* tale che: $a(x^*)^2+bx^*+c=0$; $(0>0)$ è FALSO. Quindi, la disequazione (*) è vera $\forall x \in \mathbb{R}-\{x^*\}$
- $\boxed{\Delta>0}$ $\Rightarrow$ l'eq. associata ha 2 soluzioni: $x_1<x_2$. La disequazione (*) è vera per $x<x_1 \vee x>x_2$.

2) $\boxed{ax^2+bx+c\geq 0}$ (*)

- $\Delta<0$ $\Rightarrow$ la diseq. (*) è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\boxed{\Delta=0}$ $\Rightarrow$ l'eq. associata ha 1 soluzione x^* tale che: $a(x^*)^2+bx^*+c=0$, $(0\geq 0)$ è vera. Quindi, la diseq (*) è vera $\forall x\in\mathbb{R}$.
- $\boxed{\Delta>0}$ $\Rightarrow$ $x_1<x_2$. La diseq. (*) è vera per $x\leq x_1 \vee x\geq x_2$.

3) $\boxed{ax^2+bx+c<0}$ (*)

- $\boxed{\Delta<0}$ $\Rightarrow$ la diseq. (*) non ha soluzione: $\emptyset$.
- $\boxed{\Delta=0}$ $\Rightarrow$ esiste un x^* tale che: $a(x^*)^2+bx^*+c=0$. $(0<0)$ è falsa. La diseq. (*) non ha soluzioni: $\emptyset$.
- $\boxed{\Delta>0}$ $\Rightarrow$ $x_1<x_2$. La diseq. (*) è vera per $x_1<x<x_2$.

4) $\boxed{ax^2+bx+c\leq 0}$ (*)

- $\boxed{\Delta<0}$ $\Rightarrow$ la diseq. (*) non ha soluzione: $\emptyset$
- $\boxed{\Delta=0}$ $\Rightarrow$ esiste un x^* tale che: $a(x^*)^2+bx^*+c=0$. $(0\leq 0)$ è vera. La diseq. (*) ha soluzione: x^*.
- $\boxed{\Delta>0}$ $\Rightarrow$ $x_1<x_2$. Diseq. (*) vera per $x_1\leq x\leq x_2$.

Esempi

- $x^2+2x+2>0 \iff \forall x\in\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

eq. associata $x^2+2x+2=0$

$$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4(1)(2) = 4-8=-4<0$$

- $x^2+2x+2\geq 0 \iff \forall x\in\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

$$\Delta=-4<0$$

- $x^2+2x+2<0 \iff \emptyset$ (non ci sono soluzioni)

$$\Delta=-4<0$$

- $x^2+2x+2 \le 0 \iff \emptyset$

  $\Delta < 0$

- $x^2 - 4x + 4 > 0$

eq. associata $x^2 - 4x + 4 = 0$

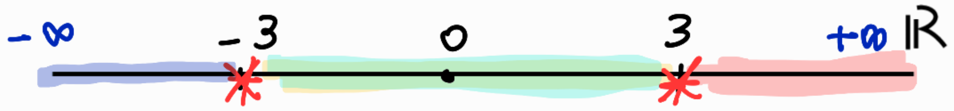
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{+4}{2} = 2$

$x^2 - 4x + 4 > 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

Es.

$I = \mathbb{R} - \{-3, 3\} =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$



$]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$

- $x^2 - 4x + 4 \ge 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

  $\Delta = 0 \quad x^* = 2$

- $x^2 - 4x + 4 < 0 \iff \emptyset$

  $\Delta = 0 \quad x^* = 2$

- $x^2 - 4x + 4 \le 0 \iff x = 2 \; ; \; \{2\}$

$\Delta = 0 \quad x^* = 2$

• $x^2 + x - 12 > 0$

$\Delta > 0$

eq. associata

$x^2 + x - 12 = 0$

$x_1 = -4$

$x_2 = 3$

$\Delta > 0$

$x^2 + x - 12 > 0 \iff x < -4 \ \vee x > 3 \iff$

$x \in \,]-\infty, -4[\ \cup \ ]3, +\infty[$

• $x^2 + x - 12 \geq 0$

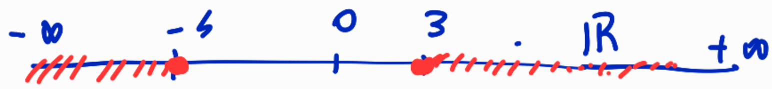
$\Delta > 0$

$x_1 = -4$

$x_2 = 3$

$x^2 + x - 12 \geq 0 \iff x \leq -4 \quad \vee \ x \geq 3 \iff$

$\iff x \in \,]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[$



• $x^2 + x - 12 < 0$

$\Delta > 0$

$x_1 = -4$

$x_2 = 3$

$x^2 + x - 12 < 0 \iff -4 < x < 3 \iff x \in \,]-4, 3[$

$x^2 + x - 12 \leq 0 \iff -4 \leq x \leq 3 \iff x \in [4, 3]$

$\Delta > 0$

• $x^2 - 9 \geq 0$

eq. ass. $x^2 - 9 = 0$ $\qquad \Delta > 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x_1 = -3$

$x_2 = 3$

$x^2 - 9 \geq 0 \iff x \leq -3 \lor x \geq 3 \iff$

$\iff x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

• $x^2 - 9 < 0 \iff -3 < x < 3 \iff \forall x \in]-3, 3[$

$\Delta > 0$

$x_1 = -3$ e $x_2 = 3$

• $4x^2 - x \leq 0 \iff 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \iff x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

eq. associata: $4x^2 - x = 0$

$\Delta > 0$

• $x(4x - 1) = 0$

$x = 0$

$4x - 1 = 0$

$4x = 1$

$x = 1/4$