Proprietà delle potenze

Siano $n, m \in \mathbb{N}$.

1) $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$

2) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $\boxed{x \neq 0}$

3) $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $\boxed{x \geq 0}$

4) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

5) $x^n \cdot x^{-n} = x^0 = 1$, $x \neq 0$

6) $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$, $x \neq 0$

7) $x^n \cdot \dfrac{1}{x^n} = x^0 = 1$, $x \neq 0$

8) $(x^n)^m = x^{n \cdot m} = (x^m)^n$

9) $\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{1} = x$

10) $\sqrt[m]{x^{m}} = x^{\frac{m}{m}}$ $\quad \cancel{x} \geq 0$

11) $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ $\quad x \geq 0$

12) $\sqrt[m]{x^{m}} = x^{\frac{m}{m}} = x^{1} = x$ //

13) $\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m} = x^{\frac{m}{m}} = x^{1} = x$ //

F. potenza ad esponente reale $\boxed{f(x) = x^{\alpha}}$

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$\alpha \neq 0$

$\sqrt[4]{x}$

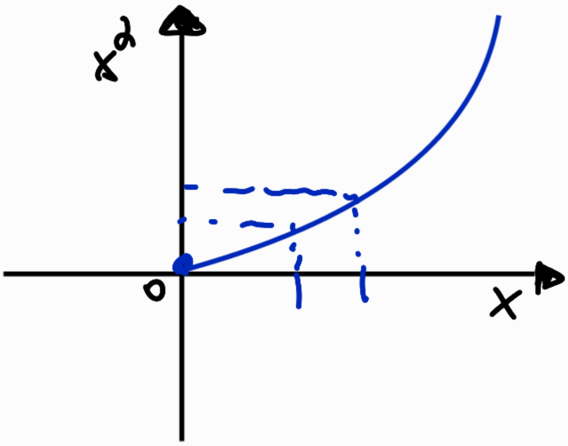
- $\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow f: x \in \mathbb{R}_0^{+} \to f(x) = x^{\alpha} \in \mathbb{R}_0^{+}}$
- $\boxed{\alpha < 0 \Rightarrow f: x \in \mathbb{R}^{+} \to f(x) = x^{\alpha} \in \mathbb{R}^{+}}$

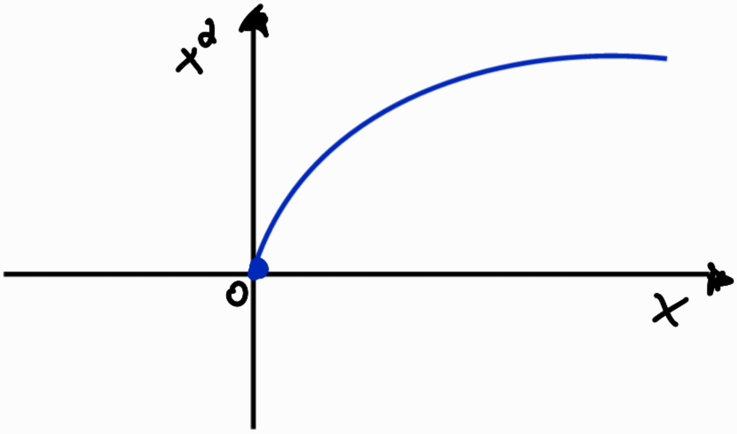
$\boxed{\alpha > 0}$
- $\to 0 < \alpha < 1 \to f(x) = x^{0.5}$; $f(x) = x^{\frac{1}{4}} = x^{0.25}$
- $\to \alpha > 1 \to f(x) = x^{2.3}$; $f(x) = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^{5}}$

f

$\alpha > 0$

$\boxed{\alpha > 1}$ $\quad \boxed{0 < \alpha < 1}$





Dominio: $X = \mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty[$

$\min f(x) = 0$ e $x = 0$ p.to min ass.

$\sup f(x) = +\infty$

f. limitata inferiorm. e illimitata sup.

Estremi relativi: NO

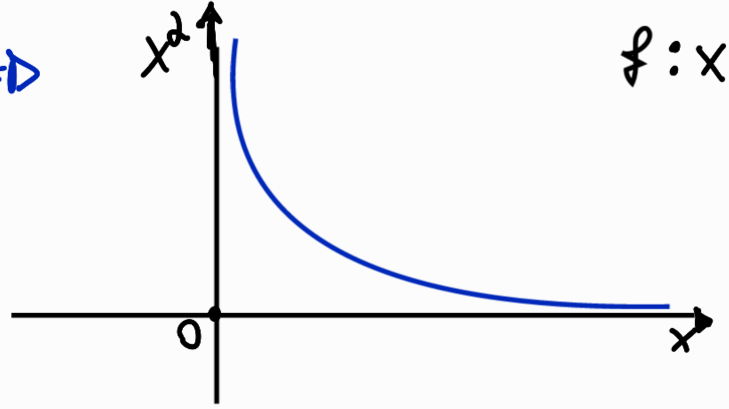
Monotonia: f. è strett. crescente $\forall x \in X$

F. né pari né dispari

f. è suriettiva su $\mathbb{R}^+_0$ (non su tutto $\mathbb{R}$)
f. è iniettiva

$\Rightarrow$ f. è biunivoca su $\mathbb{R}^+_0$ e quindi invertibile

$\boxed{\alpha < 0} \Rightarrow$



$f : x \in \mathbb{R}^+ \to f(x) = x^\alpha \in \mathbb{R}^+$

Dominio: $X = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

$\inf f(x) = 0$

$\sup f(x) = +\infty$

f. è limitata inf. e illimitata sup.

Estremi relativi: NO

Monotonia: f. è strett. decrescente $\forall x \in X$

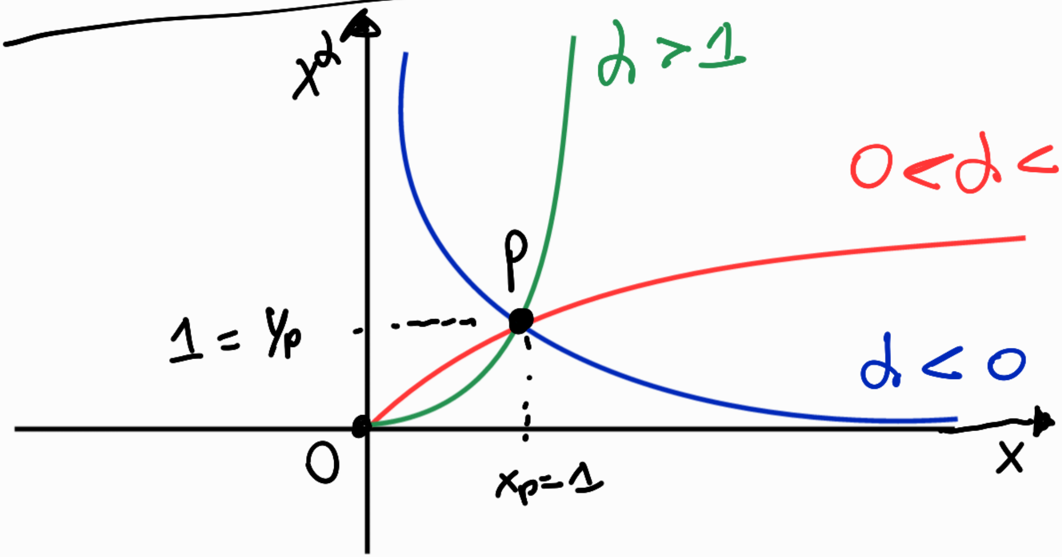
F. né pari né dispari

f. suriettiva su $\mathbb{R}^+$ (non su $\mathbb{R}$)
f. iniettiva
$\Big\} \Rightarrow$ f. biunivoca (e invertibile) su $\mathbb{R}^+$

NOTA

$y = f(x) = x^\alpha$

$x = f^{-1}(y) = y^{(1/\alpha)} = \sqrt[\alpha]{y}$



$1^\alpha = 1$

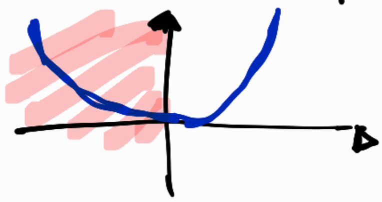
F. radice n-esima

F. inversa delle f. potenza ad esponente naturale

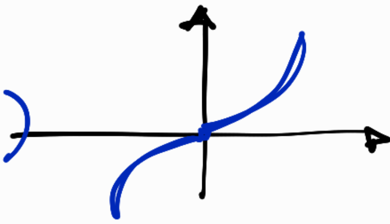
F. potenza $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$.

n pari $\rightarrow$ f. non è invertibile, ma è invertibile in una restrizione del dominio in cui è monotona (es $[0,+\infty[$)

n pari



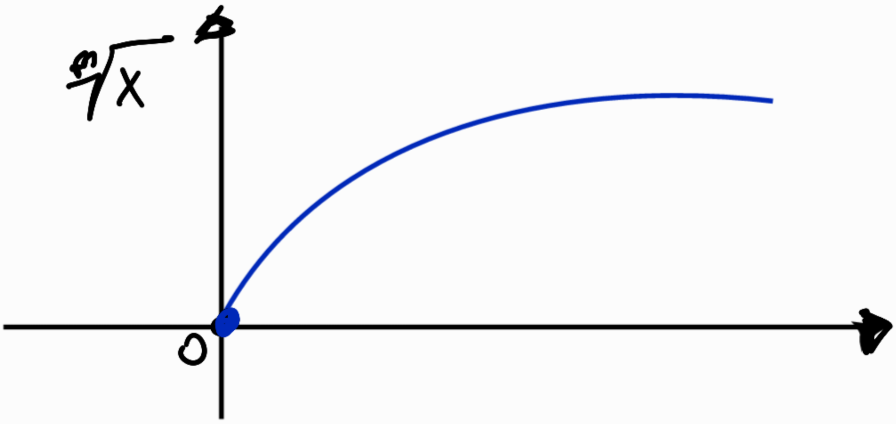
n dispari



n dispari $\rightarrow$ f. invertibile

F. radice n-esima

$$\boxed{f: x\in\mathbb{R}_0^+ \rightarrow f(x)=\sqrt[n]{x}\in\mathbb{R}_0^+, \quad n\in\mathbb{N}}$$



Dominio: $X=\mathbb{R}_0^+=[0,+\infty[$

Codominio: $Y=\mathbb{R}_0^+=[0,+\infty[$

ed estremi assoluti

$\min f(x)=0$ e $x=0$ p.to min ass.

$\sup f(x)=+\infty$

f è limitata inf. e illimitata sup.

Estremi relativi: NO

Monotonia: f. è strett. crescente $\forall x\in X$

F. né pari né dispari

F è suriettiva su $\mathbb{R}^+_0$
F è iniettiva

$\Rightarrow$ f. è biunivoca $\Updownarrow$ f è invertibile

$$y = f(x) = \sqrt[m]{x}$$

$$x = f^{-1}(y) = y^m$$

Esempio Campo di esistenza

- $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \geq 0\} = [-3, +\infty[$$

- $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{3x^2+4x}{x^2+1}}$

$$E[f(x)] = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2+4x}{x^2+1} \geq 0\right\}$$

F. valore assoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

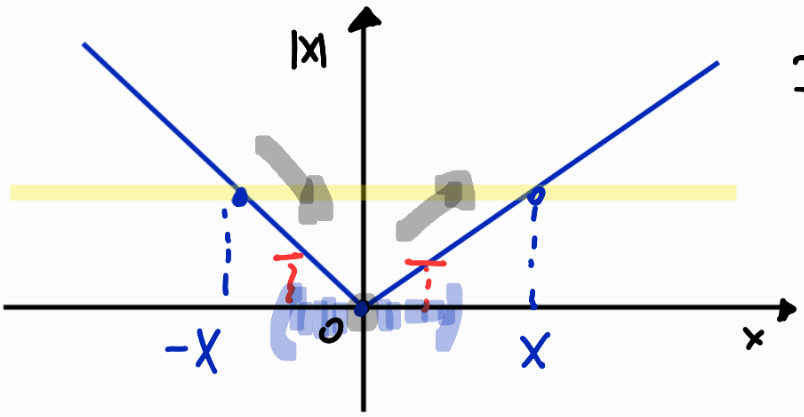
Es. $|+5| = 5 \qquad |-5| = 5$

$|-3| = 3$

$\overset{\shortparallel}{x} \quad -x = -(-3) = 3$

$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = |x| \in \mathbb{R}_0^+}$$



Dominio: $X = \mathbb{R}$

Codominio: $Y = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

$\min f(x) = 0$ e $x = 0$ p.to min ass.

$\sup f(x) = +\infty$

f. limitata inf.

f illimitata sup.

Estremi relativi: $f(x) = 0$ è min rel. e $x = 0$ p.to min rel.

Monotonia: • f. è strett. decrescente $\forall x \in]-\infty, 0[$

• f. è strett. cresc. $\forall x \in]0, +\infty[$

• f pari

• f. suriettiva solo su $\mathbb{R}_0^+$

• f. non è iniettiva

$\Rightarrow$ f non è biunivoca $\Updownarrow$ f non è invertibile

Esempio - Campo di esistenza

• $f(x) = |5x^3 - 3x + 5|$ $\qquad |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$E[f(x)] = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $f(x) = \left| \dfrac{5x^3 - 3x + 5}{x-2} \right|$

$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\} =$

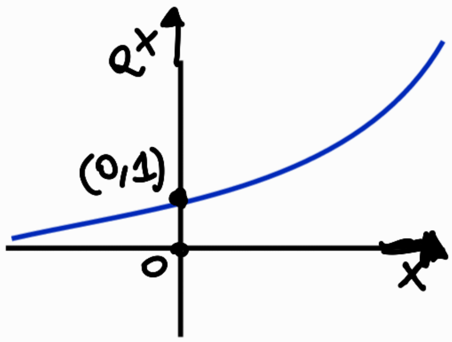
$x \neq 2 \qquad =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

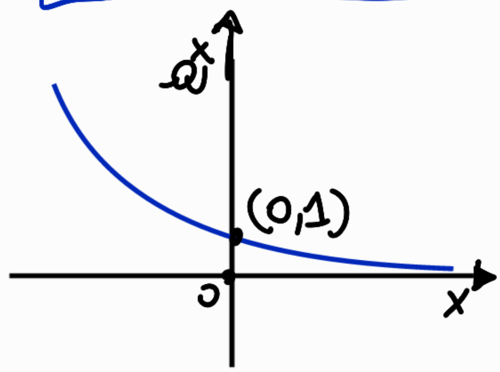
F. esponenziale $\quad f(x) = a^x$

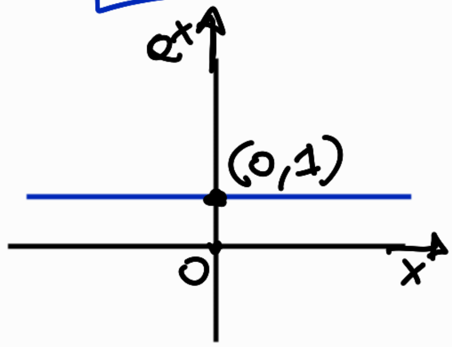
$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = a^x \in \mathbb{R}^+, \quad a > 0.$

$f(x) = 1^x = 1$

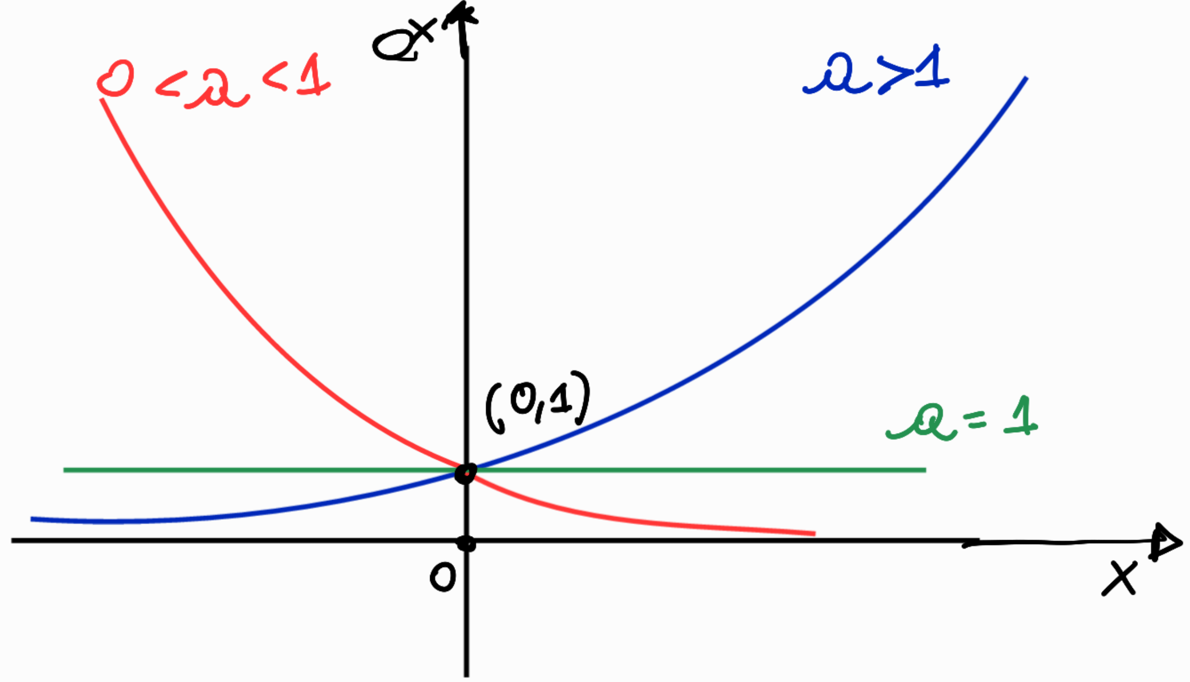
$\boxed{a > 1}$ $\qquad \boxed{0 < a < 1}$ $\qquad \boxed{a = 1}$







(f. pari)



Dominio: $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio: $Y = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

$\inf f(x) = 0$

$\sup f(x) = +\infty$

f. è limitata inf.
e illimitata sup.

Estremi relativi: NO

Monotonia:
- $a > 1 \rightarrow$ f. strett. crescente $\forall x \in X$
- $0 < a < 1 \rightarrow$ f. // decrescente //
- $a = 1 \rightarrow$ f. costante //

F. nè pari nè dispari ($a \neq 1$)

- $a = 1 \Rightarrow$ f. suriettiva solo su $\{1\}$; f. non iniettiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f. non biunivoca $\Leftrightarrow$ f. non invertibile

- $a \neq 1 \Rightarrow$ f. suriettiva (solo) su $\mathbb{R}^+$; f. è iniettiva $\Rightarrow$ f è biunivoca su $\mathbb{R}^+$

$\Updownarrow$

f. è invertibile

$\Updownarrow$

la funzione inversa è la f. logaritmo

(che infatti non esiste se $a = 1$)

Esempio

- $f(x) = 2^{x^2+5x-7}$ 2^x

$E[f(x)] = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

- $f(x) = e^{\sqrt{3x+1}}$

$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : 3x+1 \geq 0\} = [-\frac{1}{3}, +\infty[$

$x \geq -\frac{1}{3}$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x-4}{5x+1}}$$

$$E[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : 5x+1 \neq 0\} = \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[\cup \left]-\frac{1}{5}, +\infty\right[$$

$$x \neq -\frac{1}{5}$$