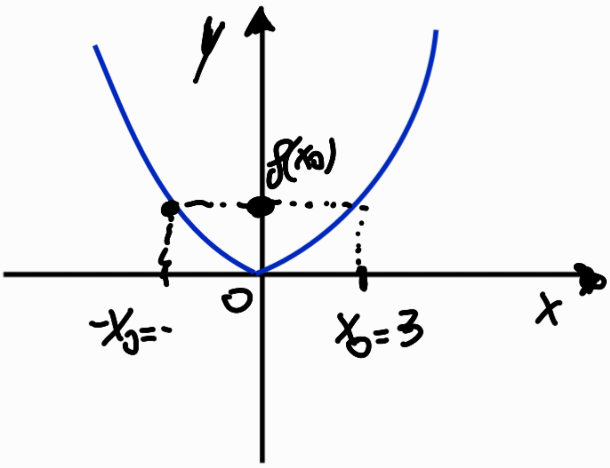
Funzioni elementari

Funzioni pari e dispari

F. pari

X e $-X \Rightarrow f(-x) = f(x)$



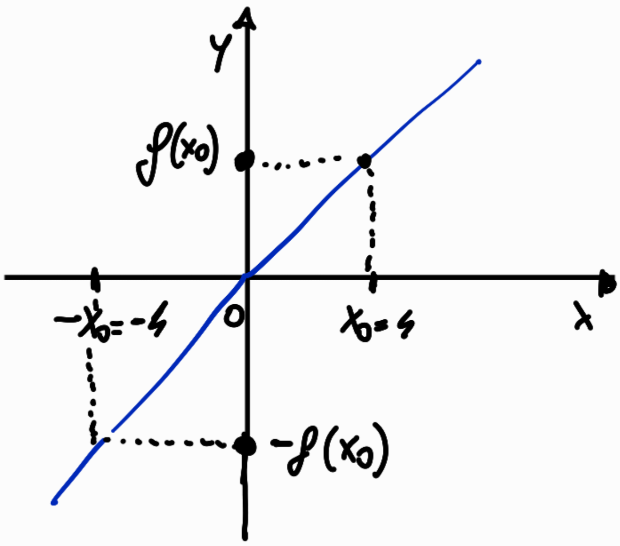
$f(x) = x^2$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 = 9$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = (-3)^2 = 9$

F. dispari

X e $-X \Rightarrow f(-x) = -f(x)$



$f(x) = x$ (eq. retta bisettrice del I e del III quadrante)

$y = x$

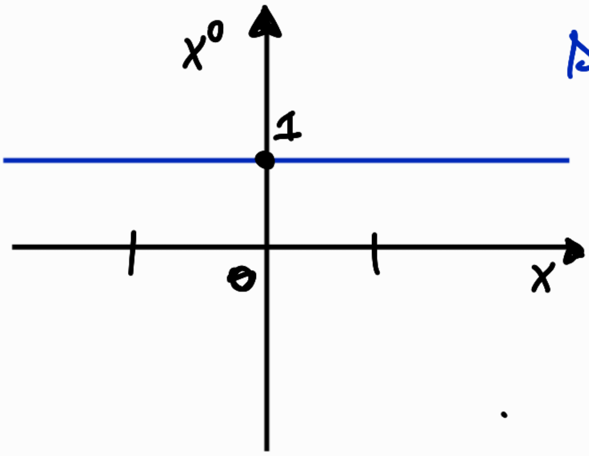
$x = 4 \quad f(4) = 4$

$x = -4 \quad f(-4) = -4$

F. potenza ad esponente naturale (n-esima)

$$\boxed{f:\ x\in\mathbb{R} \to f(x)=x^n \in \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

$\boxed{n=0}$ $\Rightarrow f: x\in\mathbb{R} \to f(x)=x^0=1 \in \mathbb{R}^+$



Dominio $X=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

Codominio ed estremi assoluti:
$Y=\{1\}$

$\min f(x)=1$

$\max f(x)=1$

f. limitata (inf. e sup.)

Estremi relativi: NO

Monotonia: f è costante $\forall x\in X$

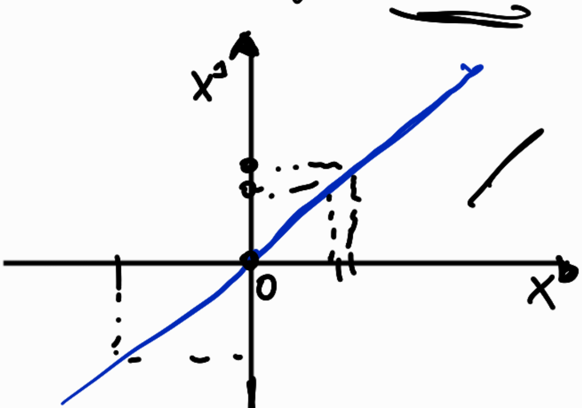
F. è pari. Es. $f(-3)=1$ e $f(3)=1 \Rightarrow f$ non iniettiva

F. suriettiva $\Rightarrow$ F è suriettiva su $\{1\}$ (non su tutto $\mathbb{R}$)

F. iniettiva $\Rightarrow$ F è non iniettiva

F. biunivoca $\Rightarrow$ F non è biunivoca

$\boxed{n=1}$ $\Rightarrow f: X\in\mathbb{R} \to f(x)=x^1=x \in \mathbb{R}$



Dominio: $X=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

Codominio ed estremi assoluti $Y=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

$\inf f(x) = -\infty$ ($\nexists \min f(x)$)

$\sup f(x) = +\infty$ ($\nexists \max f(x)$)

f. è illimitata (inf e sup.)

Estremi relativi: NO

Monotonia: f è strett. crescente $\forall x \in X$

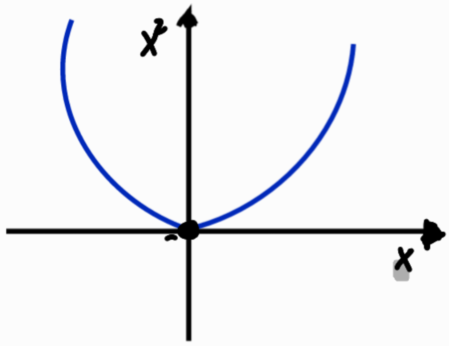
F. dispari

F. suriettiva
F. iniettiva } $\Rightarrow$ f. biunivoca $\Rightarrow$ f è invertibile

$f(x) = x$

$f^{-1}(y) = y$

$\boxed{m=2} \Rightarrow f: x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^2 \in \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$



Dominio: $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

$\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

$\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

$\min f(x) = 0$ e $x = 0$ p.to min ass.

$\sup f(x) = +\infty$

f. limitata inf. e ill. super.

Estremi relativi: $f(0)=0$ è min. rel. e $x=0$ è p.to min rel.

Monotonia: f è strett. decrescente $\forall x \in]-\infty, 0[$

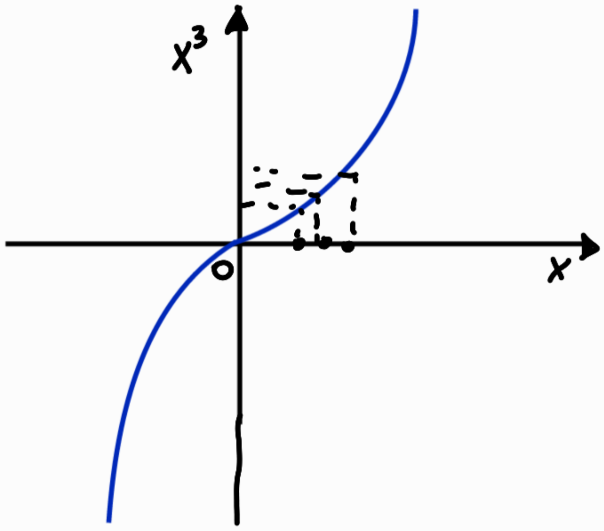
f è strett. crescente $\forall x \in]0, +\infty[$

F. pari (es. $f(4) = f(-4) = 16$)

F. è suriettiva su $\mathbb{R}^+_0$ (non è suriettiva su tutto $\mathbb{R}$)
F. non è iniettiva

$\Rightarrow$ f non è invertibile

$\boxed{n=3}$ $\rightarrow$ $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$



Dominio: $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\inf f(x) = -\infty$ ($\nexists \min f(x)$)

$\sup f(x) = +\infty$ ($\nexists \max f(x)$)

f. è illimitata (inf. e sup.)

Estremi relativi: NO

Monotonia: f. è strett. crescente $\forall x \in X$

F. dispari $\left(f(2) = 2^3 = 8 \text{ e } f(-2) = (-2)^3 = -8 \right)$

$(-2)(-2)(-2)$

$(+4)(-2)$

-8

F è suriettiva su tutto $\mathbb{R}$
F è iniettiva

$\Rightarrow$ f è biunivoca

$\Downarrow$

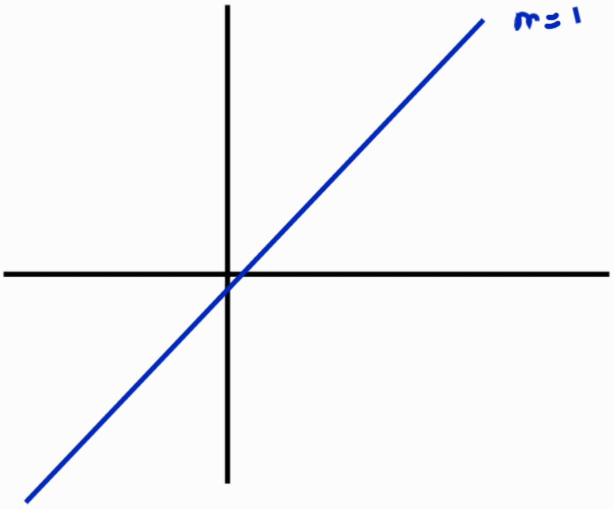
f. è invertibile

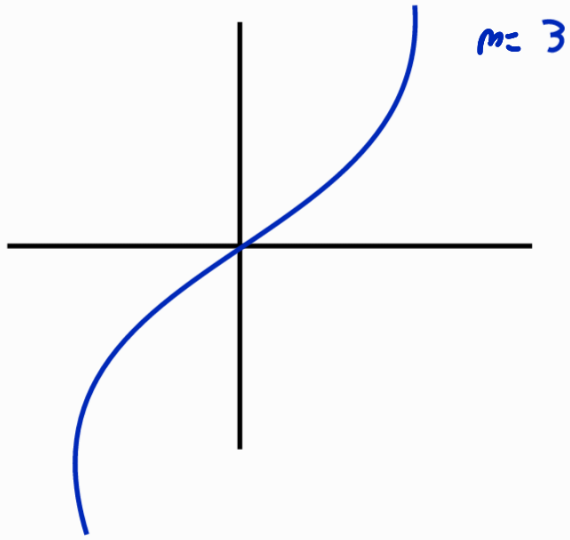
$y = f(x) = x^3$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ f. inversa

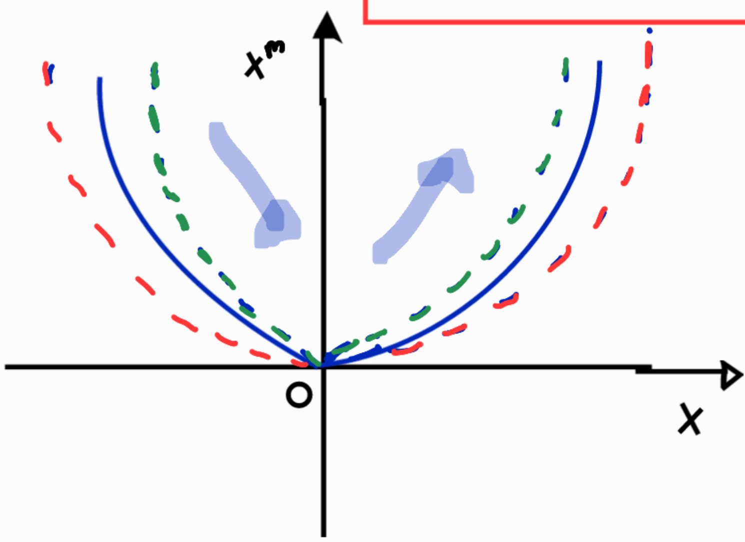
(F. potenza ad esponente naturale)   Generalizziamo → n pari / → n dispari

n = 0
n = 1
n = 2
n = 3





n. pari $\Rightarrow$ $\boxed{f: x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^n \in \mathbb{R}_0^+ \ , \quad n \in \mathbb{N}}$



Dominio : $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti : $Y = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

$\min f(x) = 0$ e $x = 0$ p.to min. ass.

$\sup f(x) = +\infty$

f. limitata infer. e illimitata superior.

Estremi relativi: $f(x) = 0$ min rel. e $x = 0$ p.to min rel.

Monotonia: f. è strett. decr. $\forall x \in]-\infty, 0[$

f. è strett. crescente $\forall x \in]0, +\infty[$

F. è pari

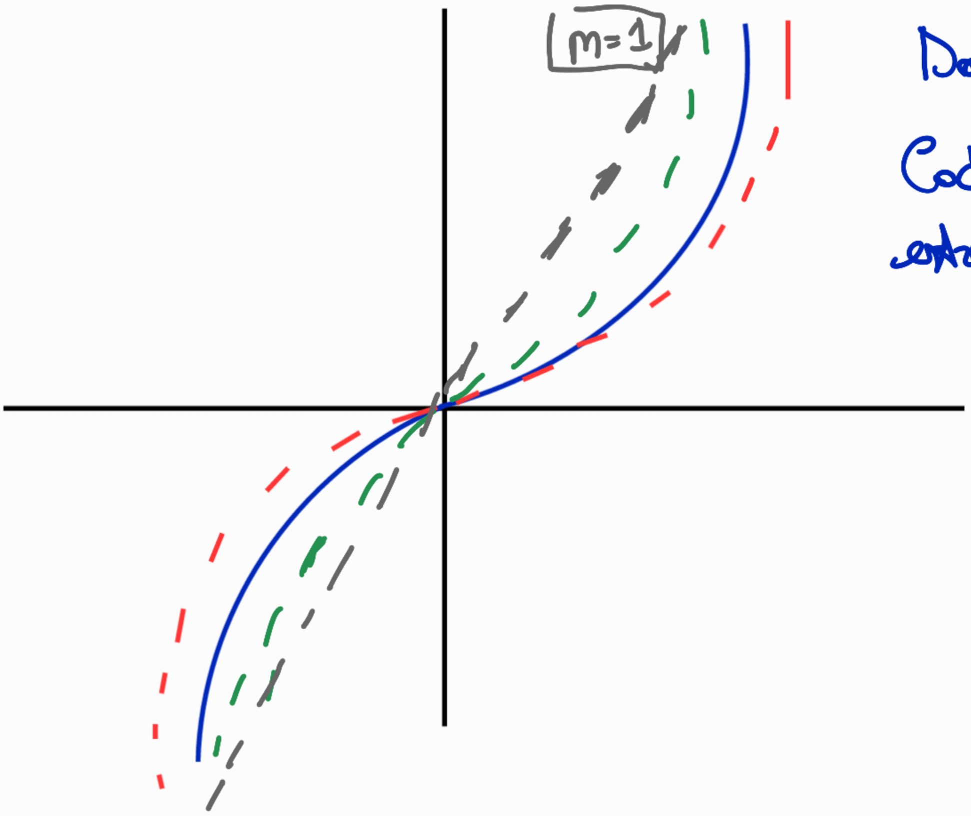
F. è suriettiva su $\mathbb{R}^0_+$ (non su tutto $\mathbb{R}$)
F. non è iniettiva

$\Rightarrow$ f non è biunivoca

$\Downarrow$

f non è invertibile

$\boxed{\text{n dispari}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^n \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}}$



Dominio: $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Codominio ed estremi assoluti: $Y = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\inf f(x) = -\infty$

$\sup f(x) = +\infty$

f. è illimitata (inf e sup.)

Estremi relativi: No

Monotonia: f è strett. crescente $\forall x \in X$

f è dispari
f. è suriettiva su tutto $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f è biunivoca (e invertibile)

f è iniettiva

Polinomi

Un polinomio è una combinazione lineare di funzioni potenza ed esponente naturale: (m che di ▶ una)

$$\boxed{P(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_m f_m(x)},$$

dove:
- $f_i(x)$ è una funzione potenza, $\forall i = 1, \dots, m$
- $a_i \in \mathbb{R}$ (numero), $\forall i = 1, \dots, m$.

Esempio

$f_1(x) = x^2 \qquad a_1 = 4$

$f_2(x) = x^3 \qquad a_2 = -2$

$f_3(x) = x^5 \qquad a_3 = +5 \qquad a_3 = -\sqrt{2}$

$$P(x) = a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + a_3 \cdot f_3$$

$$P(x) = \boxed{4x^2 - 2x^3 + 5x^5}$$

$f(x) = 4x^2 - 2x^3 + 5x^5$ (f. composta)

NOTA

Il campo di esistenza di una combinazione lineare di funzioni potenza con esponente naturale (polinomio) è sempre tutto $\mathbb{R}$.

Esempio

$$f(x) = 4x^2 - 2x^3 + 5x^5$$

$$E[f(x)] = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

Controesempio

$$g(x) = 4x^{-2} - 2x^3 + 5x^5$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) \doteq \frac{4}{x^2} - 2x^3 + 5x^5.$$

$-2 \notin \mathbb{N}$

$$\boxed{x^{-2} = \frac{1}{x^2}}$$

$x \neq 0$

$$E[g(x)] = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$