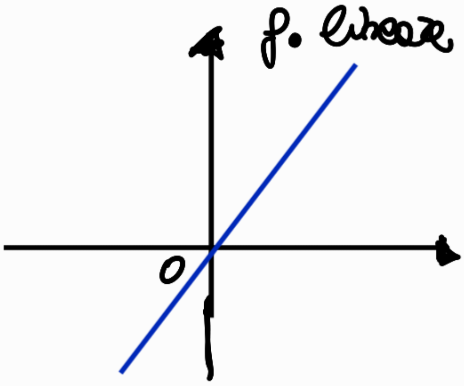
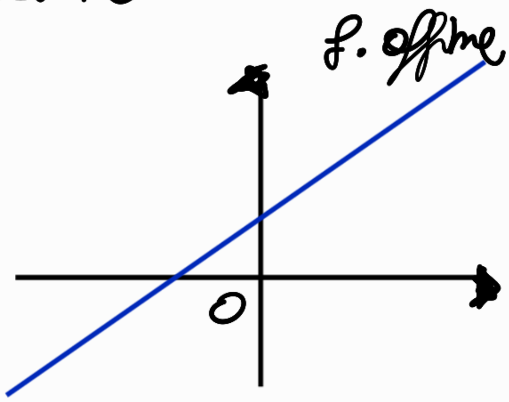
Monotonia di funzioni lineari e affini

F. lineare $\quad f(x) = a \cdot x \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

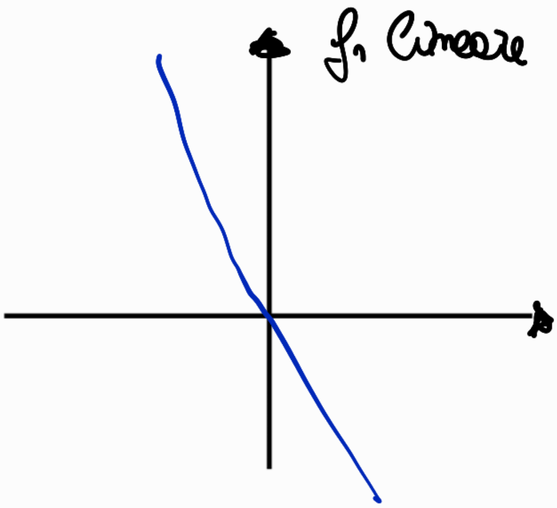
F. affine $\quad f(x) = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$
$\quad a, b \neq 0$

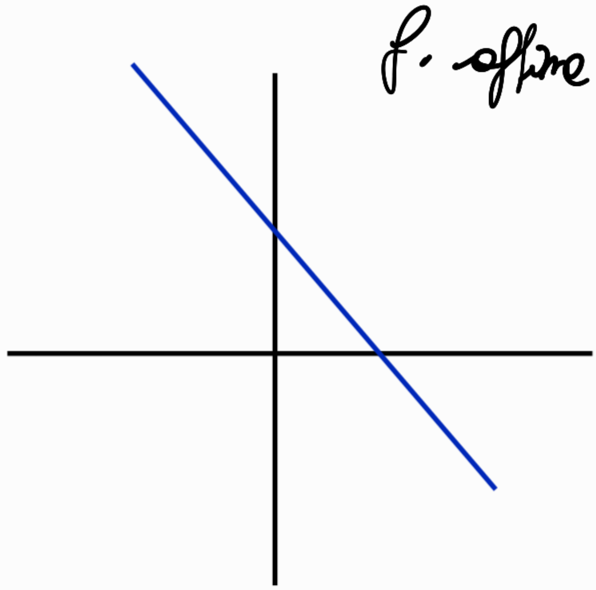
se $a > 0 \Rightarrow f.$ è strett. crescente





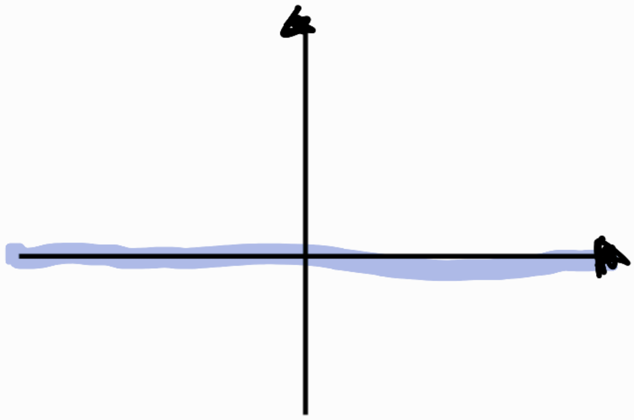
se $a < 0 \Rightarrow f.$ è strett. decrescente



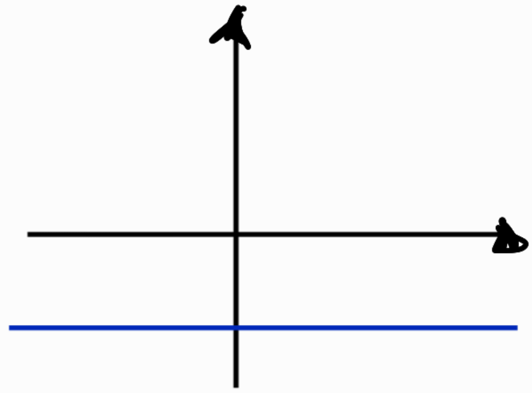


se $a = 0 \Rightarrow$ f. è costante (caso limite)

f. lineare



f. affine



$b < 0$

Monotonia di funzioni composte

Sia $f : X \to Y$

e $g : Y \to Z$

e siano f e g due funzioni monotone.

Allora:

La funzione composta $g \circ f$ è anch'essa monotona. In particolare:

- se f e g sono entrambe (strettamente) crescenti $\Rightarrow g \circ f$ è (strettamente) crescente.

- se f e g sono entrambe (strettamente) decrescenti $\Rightarrow$ $\Rightarrow g \circ f$ è (strettamente) crescente.

- se f e g sono una (strett.) crescente e l'altra (strett.) decrescente $\Rightarrow g \circ f$ è (strettamente) decrescente.

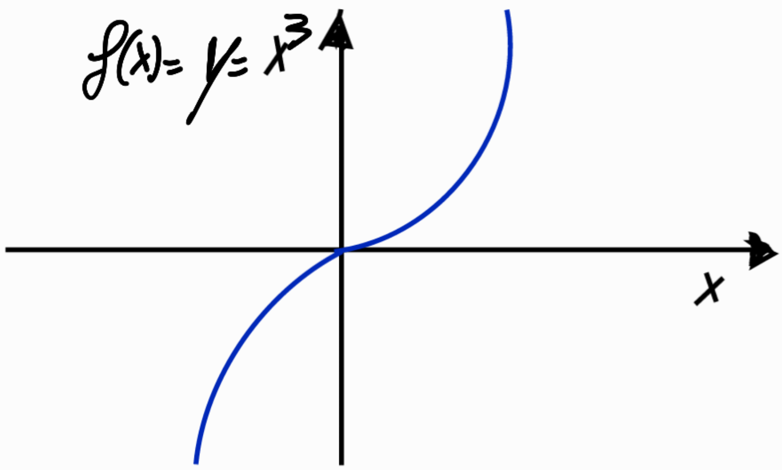
Monotonia dell'inversa

$f: X \to Y$

- Se f è biunivoca $\Rightarrow f$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f$ è monotona.
- La funzione inversa f^{-1} conserva la monotonia di f.

Esempio

$$f(x) = x^3$$



$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

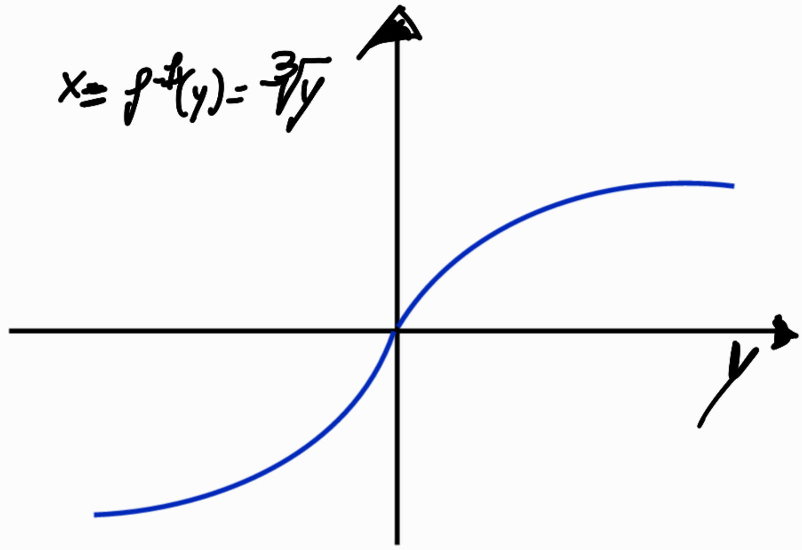


Grafico di una funzione

Sia

$f: x \in X \subseteq \mathbb{R} \to y = f(x) \in Y \subseteq \mathbb{R}$.

Si definisce grafico della funzione f l'insieme delle coppie o dei punti $(x, f(x))$, ovvero:

$$\boxed{G_f = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in X, f(x) \in Y \}}.$$

L'insieme $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ (sottoinsieme del piano)

Ogni punto $(x, f(x))$ non è altro che un punto del tipo (x, y) rappresentabile nel piano cartesiano.