Estremi di una funzione

- Max / Min assoluti

Minimo assoluto:

$\min\limits_{x \in X} f(x)$: $\quad \min\limits_{x \in X} f(x) \leq f(x) \quad \boxed{\forall x \in X}$

x_0 : $f(x_0) = \min\limits_{x \in X} f(x)$ è p.to min. assoluto

Massimo assoluto:

$\max\limits_{x \in X} f(x)$: $\quad \max\limits_{x \in X} f(x) \geq f(x) \quad \forall x \in X$

x_0 : $f(x_0) = \max\limits_{x \in X} f(x)$ p.to max assoluto

Esempio

$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\qquad Y = \{5, 2, 1, 2, 5\}$

$f: x \in X \subseteq \mathbb{R} \to \boxed{f(x) = x^2 + 1} \in Y \subseteq \mathbb{R}$

$x = -2 \to f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$x = -1 \to f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$x = 0 \to f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$x = 1 \to f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$x = 2 \to f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$\min f(x) = 1$; $x = 0$ p.to min assoluto

$\max f(x) = 5$; $x = \pm 2$ p.to max assoluto

Esempio

$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

$f: x \in \mathbb{Z} \to f(x) = 1 - x^2 \in Y \subseteq \mathbb{R}$

$x = -3 \to f(-3) = 1 - (-3)^2 = -8$

$x = -2 \to f(-2) = 1 - (-2)^2 = -3$

$x = -1 \to f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$

$x = 0 \to f(0) = 1$

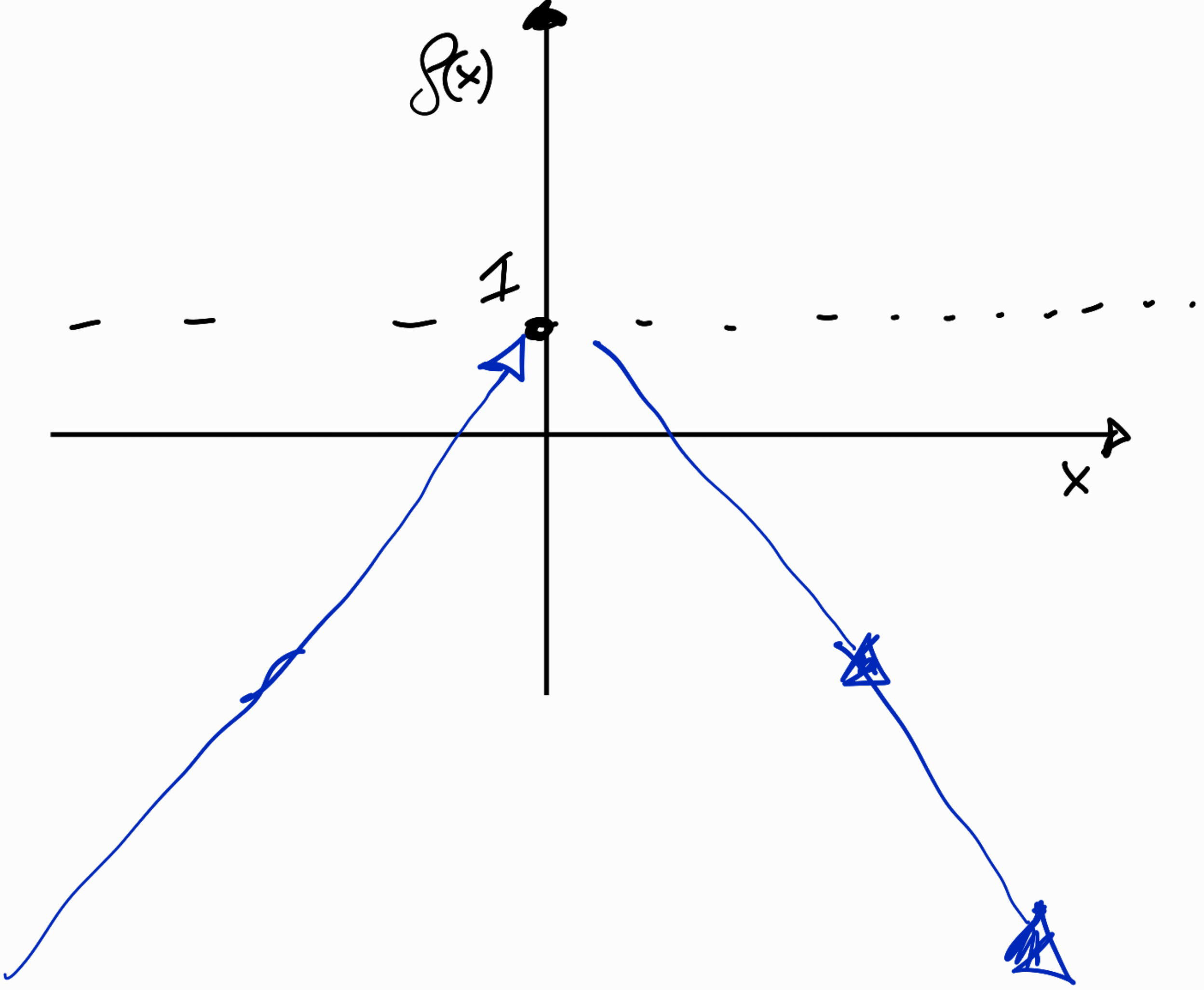
$x = 1 \to f(1) = 1 - (1)^2 = 0$

$x = 2 \to f(2) = 1 - 2^2 = -3$

$x = 3 \to f(3) = 1 - 3^2 = -8$

+

−



$$Y = \{ \dots, -8, -3, 0, 1, 0, -3, -8, \dots \}$$

$\max f(x) = 1$ $\quad x = 0$ p.to max ass.

$\nexists \min f(x)$

$\inf f(x) = -\infty$

Estremo inferiore ed estremo superiore di una funzione

Sia $f: x \in X \subseteq \mathbb{R} \to y = f(x) \in Y \subseteq \mathbb{R}$

Estremo inferiore = estremo inferiore del codominio Y, ovvero:

$$\boxed{\inf_{x \in X} f(x) = \inf Y}$$

Estremo superiore = estremo superiore del codominio Y, ovvero:

$$\boxed{\sup_{x \in X} f(x) = \sup Y}$$

NOTA Inf $f(x)$ e sup $f(x)$ esistono sempre.

NOTA

$\exists \min f(x) \Rightarrow \inf f(x) = \min f(x)$

$\exists \max f(x) \Rightarrow \sup f(x) = \max f(x)$

$\exists \inf f(x) \not\Rightarrow \exists \min f(x)$

$\exists \sup f(x) \not\Rightarrow \exists \max f(x)$

Esempio

$$f: X=[1,2[\ \subseteq\mathbb{R}\to Y=]\underbrace{-5}_{\inf f(x)},\ \underbrace{-2}_{\sup f(x)\ =\ \max f(x)}]\subseteq\mathbb{R}$$

$$\inf f(x) = -5 \quad \text{e} \quad \nexists \min f(x)$$

$$\max f(x) = -2$$

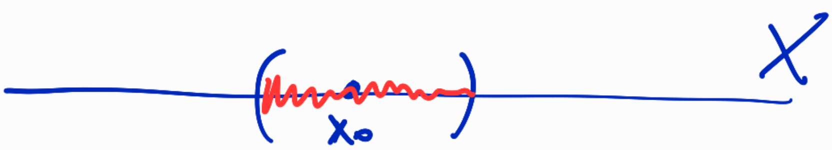
Minimo e massimo relativi di una funzione

Minimo relativo

$$f: x \in X \subseteq \mathbb{R} \to y = f(x) \in Y \subseteq \mathbb{R} \qquad \boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$$

Preso $x_0 \in X$, si dice che x_0 è punto di minimo relativo se accade che:

$$\boxed{\exists\, I \in \mathcal{I}(x_0) : f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in (X \cap I)}$$



$\boxed{f(x_0)}$ è il minimo relativo.

NOTA

$f(x_0) \in Y$ (MINIMO RELATIVO)

$X_0 \in X$ (PUNTO DI MINIMO RELATIVO)

Massimo relativo

$f: x \in X \subseteq \mathbb{R} \to y = f(x) \in Y \subseteq \mathbb{R}$

Preso $x_0 \in X$, si dice che x_0 è punto di massimo relativo se accade che:

$$\boxed{\exists\, I \in \underset{x_0 \in \mathbb{R}}{I(x_0)} : \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X \cap I}$$

$\boxed{f(x_0)}$ è detto massimo relativo.

NOTA

$f(x_0) \in Y$ (codominio) - Massimo Relativo

$X_0 \in X$ (dominio) - Punto max relativo