Funzioni

Siano S e T due insiemi (non necessariamente numerici).

Una funzione f è una legge del tipo $\boxed{f: S \to T}$

che associa ad ogni elemento di S uno e un solo elemento di T.

$$\boxed{f \quad S \to T}$$

S: dominio di f

T: codominio

NOTA

Se S e T sono insiemi numerici, la funzione f è una funzione numerica.

Esempi di funzioni numeriche

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Funzione con cui avremo di più a che fare)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

Immagine di una funzione

Sia $f: S \to T$ e un punto $x \in S$.

Si definisce con $f(x)$ l'immagine di x mediante f (o immagine di x).

NOTA

- Quando parliamo di una funzione di una variabile, ossia $f(x)$, un punto $x \in S$ (dominio della funzione) è da intendersi come un unico valore (si chiama anche scalare).
- Per funzioni numeriche, ad esempio, $x \in S \subseteq \mathbb{R}$, ossia il dominio della funzione è sicuramente un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ quindi x è un (unico) numero.
- Un punto nel piano cartesiano $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è identificato da una coppia di valori, ossia le coordinate. La coppia (x_P, y_P) si chiama anche vettore.
- Mentre $\boxed{x \in S \subseteq \mathbb{R}}$ è rappresentabile sulla retta dei numeri reali $\mathbb{R}$, $\boxed{P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2}$ è rappresentabile nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definizione di funzione (alla luce del concetto di immagine)

$$\boxed{f : x \in S \to y = f(x) \in T}$$

Esempio - Funzione lineare

$y = f(x)$ con $f(x) = mx + n$

ossia

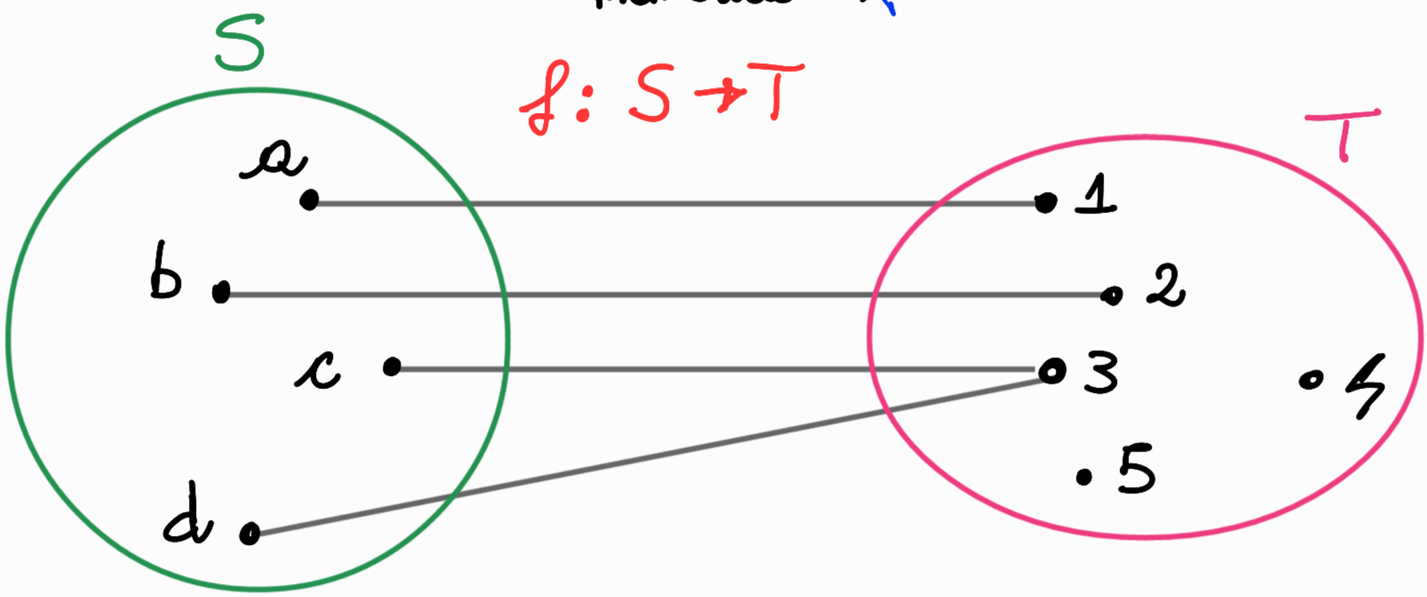
$y = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{R}$.

ossia

$f : x \in \mathbb{R} \to y = mx + n \in \mathbb{R}$ dove $m, n \in \mathbb{R}$.

Esempio - Funzione generica (non necessariamente numerica) (con il diagramma di Venn)

$f : S \to T$



$a \in S \to f(a) = 1 \in T$

$b \in S \to f(b) = 2 \in T$

$c \in S \to f(c) = 3 \in T$

$d \in S \to f(d) = 3 \in T$

NOTE

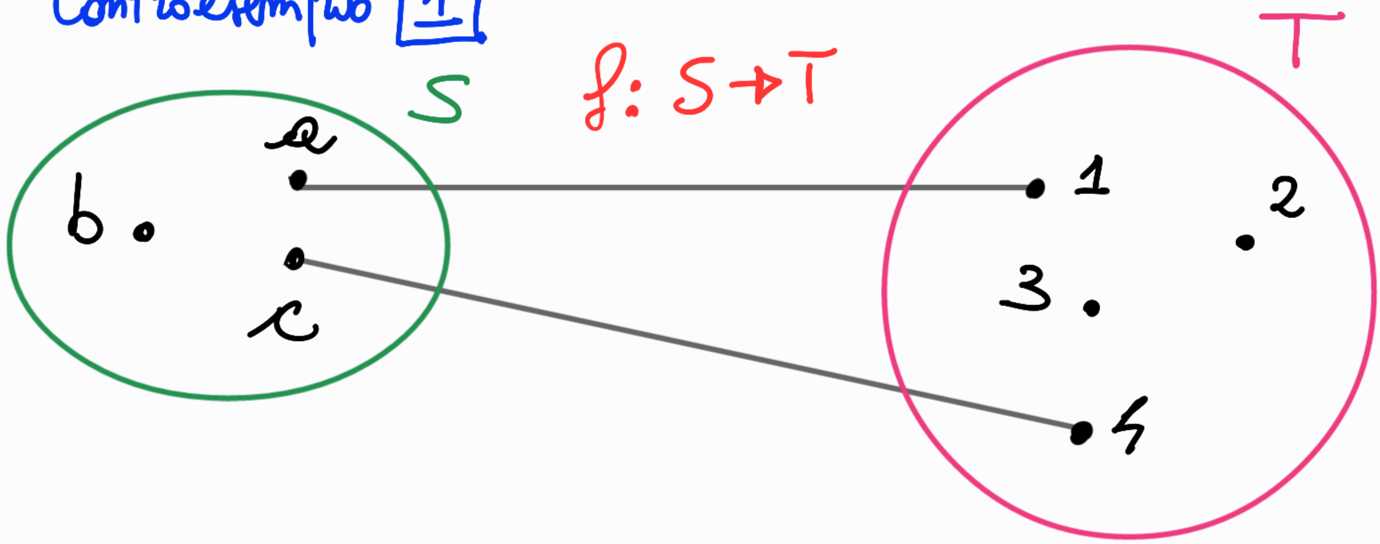
1) Nessun elemento del dominio S deve essere scoperto (altrimenti f <u>non è</u> una funzione).

2) Ciascun elemento del dominio S non può avere <u>due o più</u> immagini nel codominio T (altrimenti f <u>non è</u> una funzione).

3) <u>Due o più</u> elementi del dominio S possono avere la <u>medesima</u> immagine.

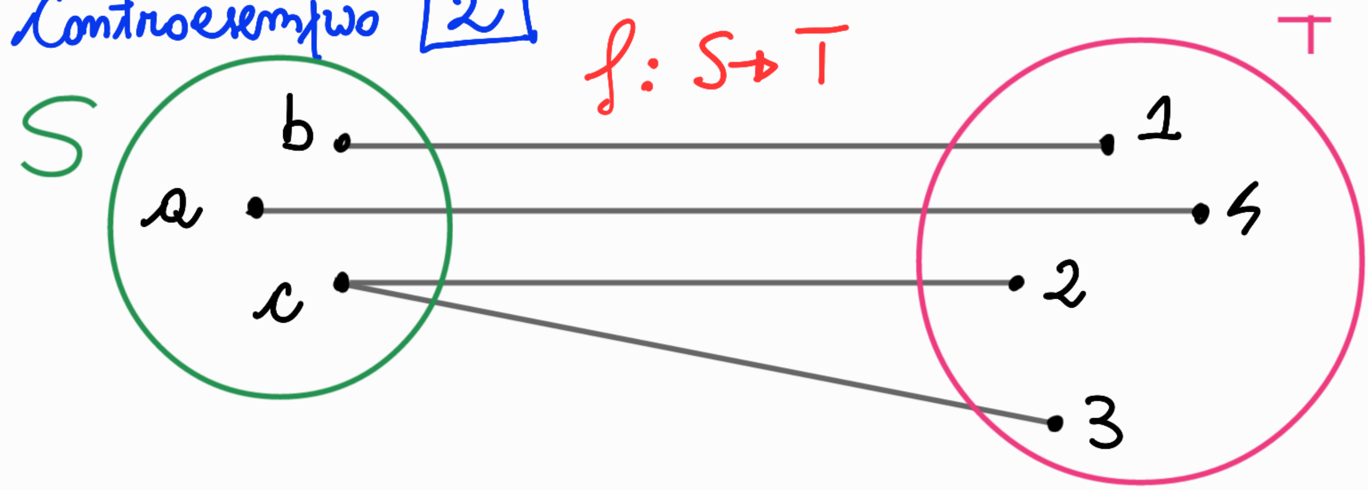
4) È possibile che un elemento del codominio T non sia immagine di <u>alcun elemento</u> del dominio S.

Controesempio $\boxed{1}$



f non è una funzione perché b non ha alcuna immagine.

Controesempio 2



f non è una funzione perché c ha due immagini: $\{2,3\}$.

NOTA

Il <u>diagramma di Venn</u> può essere utilizzato per rappresentare graficamente un insieme generico A solo se la <u>cardinalità</u> di A, ossia $|A|$, è un numero finito:

$$\boxed{|A| \in \mathbb{N}}.$$

($|A|$ deve essere necessariamente un numero naturale finito, ossia non può essere uguale a $+\infty$)

Esempio di funzione numerica

(Rappresentazione della legge f in maniera analitica - non grafica)

$$\boxed{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \text{ con } f(n) = 2n+1}$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{f: n \in \mathbb{N} \to f(n) = 2n+1 \in \mathbb{N}}$$

Come agisce la funzione $f(n)$?

- $n = 1 \to f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$
- $n = 2 \to f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \in \mathbb{N}$
- ecc.

Immagine e Controimmagine

$$\boxed{f: x \in \underbrace{X}_{\text{dominio di } f} \subseteq S \to y = f(x) \in \underbrace{Y}_{\text{codominio di } f} \subseteq T}$$

(definizione più estesa di funzione)

$$\boxed{f: x \in \underbrace{X}_{\text{dominio di } f} \to y = f(x) \in \underbrace{Y}_{\text{codominio di } f}}$$

(definizione meno estesa di funzione)

$$\boxed{f: \underbrace{X}_{\text{dominio di } f} \to \underbrace{Y}_{\text{codominio di } f}}$$

(definizione più compatta di funzione)

NOTA

Il dominio è un sottoinsieme (con inclusione in senso largo) di un insieme più grande detto campo di esistenza:

$$\boxed{X \subseteq S = E[f(x)]}$$

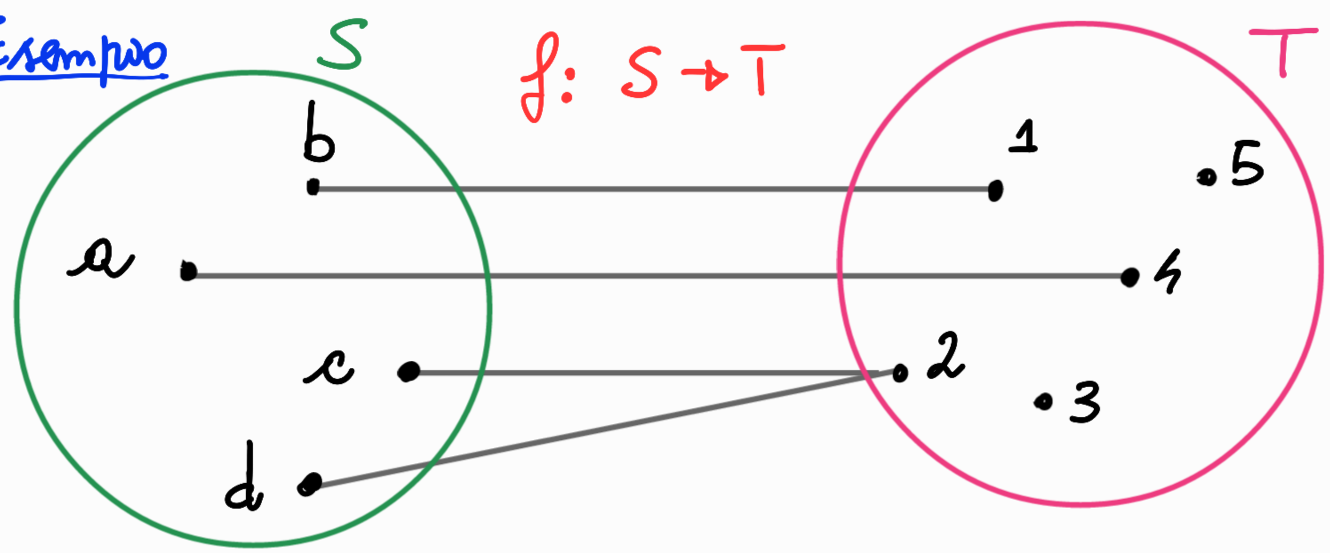
A partire dalla definizione "più estesa" di funzione, definiremo:

- $\boxed{y = f(x)}$ l'immagine di x (mediante f);
- $\boxed{x = f^{-1}(x)}$ la controimmagine di y (mediante f).

Come si determina la controimmagine?

$\Downarrow$

Esempio



- $a \in S \to f(a) = 4 \in T$

$\Updownarrow$

$\{a\} \subseteq S \to f(\{a\}) = \{4\}$ | $f^{-1}(\{4\}) = \{a\}$

$\{b\} \subseteq S \to f(\{b\}) = \{1\}$ | $f^{-1}(\{1\}) = \{b\}$

$\{c\} \subseteq S \to f(\{c\}) = \{2\}$ | $f^{-1}(\{2\}) = \{c, d\}$

$\{d\} \subseteq S \to f(\{d\}) = \{2\}$ | $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$

$f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$