Intervalli

Intervallo = insieme numerico contenente un illimitato numero di valori compresi tra due estremi:

= estremo inferiore
= estremo superiore.

Intervallo
- limitato (gli estremi sono numeri reali)
- illimitato (uno dei due estremi è infinito)

Intervalli limitati

Siano $\boxed{a, b \in \mathbb{R}}$.

- Intervallo chiuso:

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad a, b \in I$$

- Intervallo aperto:

$$I =]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$a, b \notin I$$

• Intervallo chiuso a sinistra (aperto a destra)

$$I = [a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$a \in I$$
$$b \notin I$$

• Intervallo chiuso a destra (aperto a sinistra)

$$I =]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$a \notin I$$
$$b \in I$$

Intervalli illimitati   Siano $a, b \in \mathbb{R}$.

• Intervallo chiuso illimitato superiormente

$$I = [a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$a \in I$$

• Intervallo aperto illimitato superiormente

$$I =]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$a \notin I$$

• Intervallo chiuso illimitato inferiormente

$$I =]-\infty, b] = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$b \in I$$

- I intervallo <u>aperto</u> illimitato inferiormente

$$I =]-\infty, b[\; = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$b \notin I$$

NOTA

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\; = (-\infty, +\infty)$$

(intervallo "<u>illimitato</u>" sia inferiormente che superiormente)

Esempio

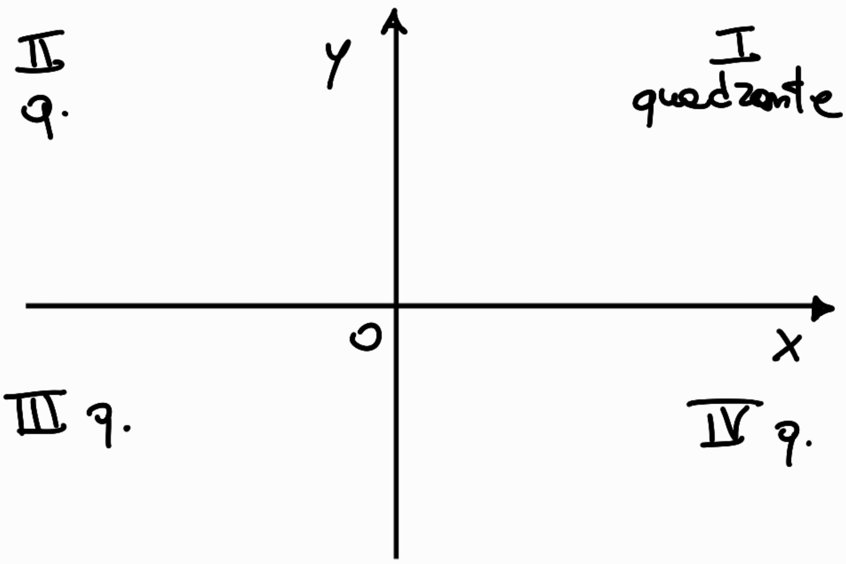
$$I = [3, +\infty[$$

- intervallo illimitato superiormente *
- intervallo illimitato inferiormente
- intervallo illimitato *

Elementi di geometria analitica

Piano cartesiano

$x \perp y$



Rappresentazione di un punto P nel piano

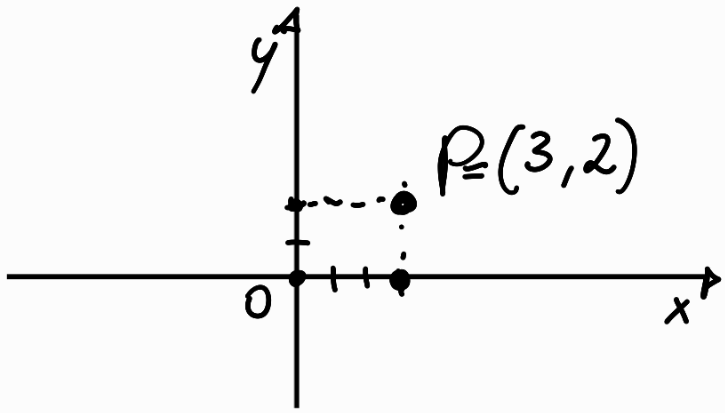
$$P \equiv (x_P, y_P), \quad \left(P = (x_P, y_P) \right), \text{ dove}$$

x_P, y_P coordinate del punto.

- x_P è l'<u>ascissa</u> del punto P;
- y_P è l'<u>ordinata</u> del punto P.

Esempio

$$P = (\underset{\substack{\downarrow \\ x_P}}{3}, 2)$$



$\boxed{P = (x_P, y_P)} \in \mathbb{R}^2 = \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ $\boxed{a \in \mathbb{R}}$

$\Downarrow$

Prodotto cartesiano

$A = (3,5)$

$B = (5,3)$

$A \neq B$

Retta passante per due punti

Siano $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $A, B \in \mathbb{R}^2$.

Eq. retta passante per A e B (è unica):

$$\boxed{\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}}$$

Esempio

$A = (2,3)$, $B = (5,8)$.

$$\frac{y-3}{8-3} = \frac{x-2}{5-2} \Longleftrightarrow \frac{y-3}{5} = \frac{x-2}{3} \Longleftrightarrow$$

$$y-3=\frac{5}{3}\cdot(x-2) \iff y-3=\frac{5}{3}x-\frac{10}{3} \iff$$

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}+3 \iff \boxed{y=\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}}$$

f. lineare

$y=y(x)$

Eq. retta in forma implicita (parametrica)

$$\boxed{ax+by+c=0}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

parametri o coefficienti

Es. $2x+3y-5=0$

Eq. retta in forma esplicita (normale)

[funzione lineare]

$$\boxed{y=mx+n}$$

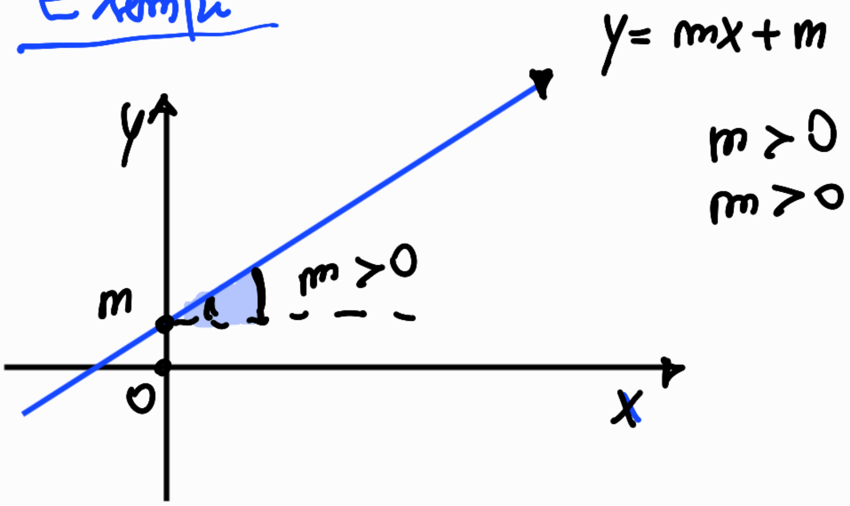
$$\boxed{y=ax+b}$$

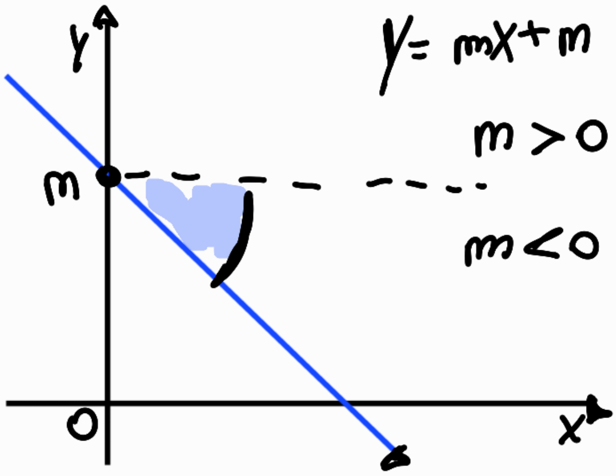
dove:
- $m \in \mathbb{R}$ coefficiente angolare (pendenza)
- $n \in \mathbb{R}$ intercetta (punto in cui la retta taglia l'asse delle ordinate)

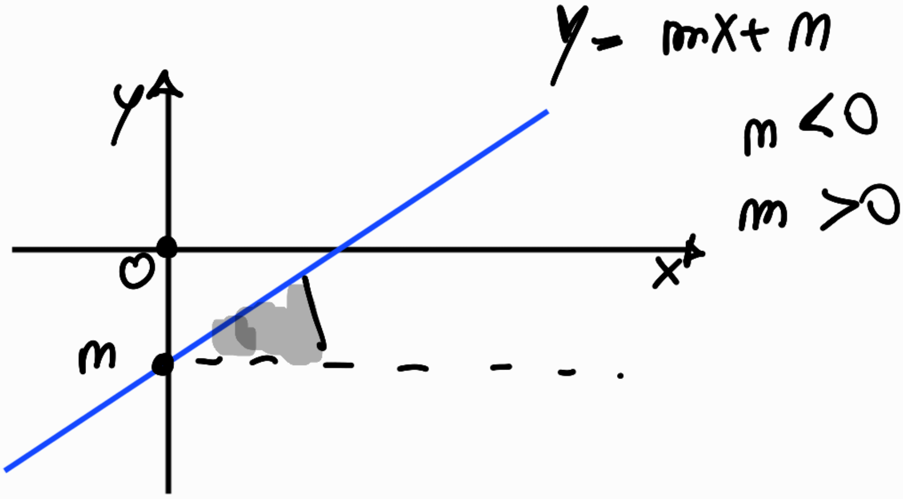
Coefficiente angolare

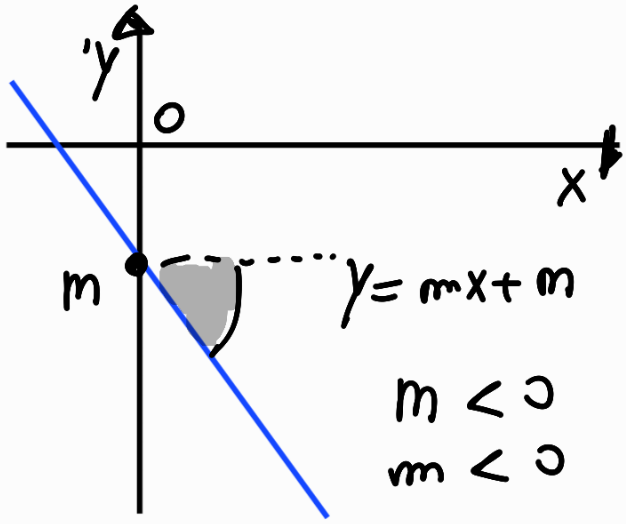
- $m > 0 \Rightarrow$ pendenza positiva
- $m < 0 \Rightarrow$ pendenza negativa
- $m = 0 \Rightarrow$ parallela all'asse delle ascisse

Esempi

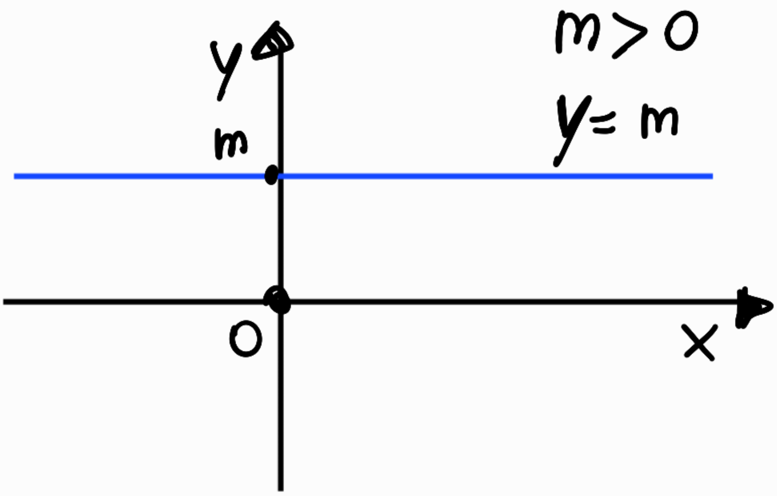


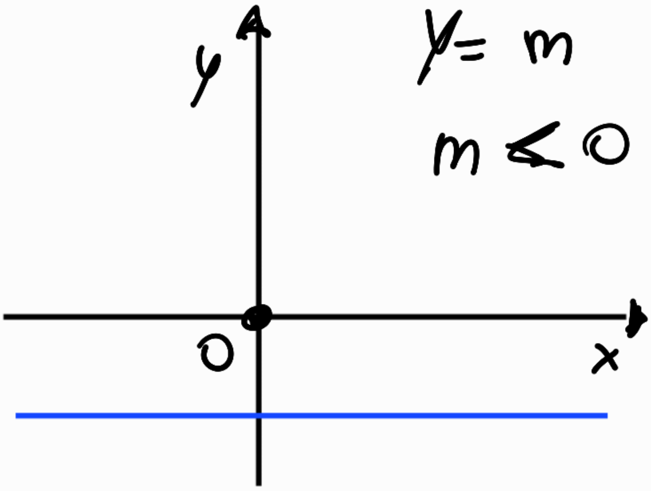






Se $m = 0 \Rightarrow y = m$





Passaggio dalla forma implicita a esplicita

f. implicita: $ax + by + c = 0$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\frac{\cancel{b}y}{\cancel{b}} = \frac{-ax - c}{b}$$

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = -\dfrac{a}{b} \\[2ex] m = -\dfrac{c}{b} \end{array}}$$

$$\boxed{y = mx + m}$$ forma esplicita

Es. $2x + 3y - 6 = 0$ $\qquad a = 2$, $b = 3$, $c = -6$

$m = -\frac{2}{3}$; $m = -\frac{-6}{3} = +2$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{m} x + \underset{\substack{\Downarrow \\ m}}{2}$$

Eq. retta passante per un punto

Siano $P=(x_P,y_P)\in\mathbb{R}^2$ e $m\in\mathbb{R}$ un dato coefficiente angolare.

Eq. retta: $\boxed{y-y_P=m(x-x_P)}$

oppure

$$\boxed{y=\underbrace{m}_{\text{coefficiente angolare}}x\ \underbrace{-\,m x_P+y_P}_{\text{intercetta}}}$$

Esempio

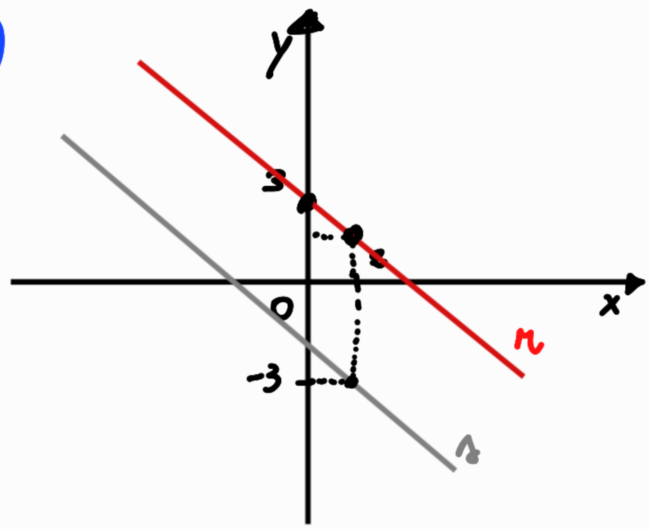
$P=(2,-3)$ retta $\boxed{r:\ y=-\frac{1}{2}x+3}$ $m_r=-\frac{1}{2}$

retta s: $y-y_P=m_r(x-x_P)$

$$y-(-3)=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y+3=-\frac{1}{2}x+1$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x-2}$$



Condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Siano:

$$r: \; y = m_r x + q_r$$

(forma esplicita)

$$s: \; y = m_s x + q_s$$

- Le due rette r ed s sono parallele ($r \parallel s$) se: $\boxed{m_r = m_s}$.
- Le due rette r ed s sono perpendicolari ($r \perp s$) se:

$$\boxed{m_r = -\frac{1}{m_s}} \iff \boxed{m_r \cdot m_s = -1}$$

Siano:

$$r: \; a_r x + b_r y + c = 0$$

$$s: \; a_s x + b_s y + c = 0$$

- Le due rette r ed s sono parallele ($r \parallel s$) se:

$$-\frac{a_r}{b_r} = -\frac{a_s}{b_s} \iff \boxed{\frac{a_r}{b_r} = \frac{a_s}{b_s}}$$

- Le due rette r ed s sono perpendicolari ($r \perp s$) se:

$$-\frac{a_r}{b_r} = -\left(-\frac{b_s}{a_s}\right) \iff$$

$$-\frac{a_r}{b_r} = +\frac{b_s}{a_s} \iff \frac{a_r}{b_r} = \frac{a_s}{b_s}$$

Esempio (grafico)

$r: \quad y = 2x + 3$

$s: \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$

retta r

x	y
0	3
-1	1

$P_1 = (0,3)$

$P_2 = (-1,1)$

retta s

x	y
0	2
2	1

$P_3 = (0,2)$

$P_4 = (2,1)$