Teoria degli insiemi

Un insieme è una collezione di elementi, in numero finito o in numero infinito.

$A = \{a, b, c\}$ (insieme finito)

$B = \{x : x \text{ è un numero pari}\}$ (insieme infinito)

- Un insieme si denota con le lettere maiuscole dell'alfabeto.
- Gli elementi che appartengono ad un insieme si denotano con le lettere minuscole.

- Un insieme si rappresenta o elencando gli elementi che ne fanno parte oppure specificando una proprietà che caratterizza i suoi elementi.

Appartenenza

$a \in A$ ($\in$ simbolo di appartenenza)

$a \notin A$ ($\notin$ " " non appartenenza)

Quantificatori

$\exists$: "esiste" ; $\exists\, x \in X$: vale la proprietà A

$\exists!$: "esiste ed è unico" ; $\exists!\, x_0 \in X$: vale la proprietà B

$\forall$: "per ogni" ; $\forall\, x \in S$: vale la proprietà C

Esempio

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$\exists\, x \in S : x < 4$

$\exists!\, x \in S : x < 2$

$\forall x \in S$: x è un numero naturale

NOTA

Il numero di elementi di un insieme S si chiama <u>cardinalità</u> e si denota con il simbolo: $|S|$.

Esempio

$S = \{1, 5, 7, 9\}$

$|S| = 4$

- Se $|S| \in \mathbb{N}$ (insieme dei numeri naturali), allora S è un insieme finito.
- Se $|S| = +\infty$ (quantità non reale e non finita), allora S è un insieme infinito.

Sottoinsieme

Dati due insiemi A e B, "A è un sottoinsieme di B" e si indica con $A \subseteq B$ se ogni elemento di A appartiene anche a B.

$A \subseteq B$ (A è un sottoinsieme di B, ma potrebbe anche essere uguale a B)

$\Downarrow$

Inclusione non stretta

Esempio

$A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B$

$A \subset B$ (A è sottoinsieme di B in senso stretto, ossia esistono degli elementi di B che non appartengono ad A)

$\Downarrow$

Inclusione stretta

Insieme numerico: insieme avente per elementi numeri.

Insieme vuoto: insieme che non contiene elementi. Esso si denota con il simbolo $\emptyset$.

Notazione non corretta: $\{\ \}$.

Operazioni tra gli insiemi

Consideriamo due insiemi A e B.

1) **Unione**

$A \cup B$ (A unito B)

$$A \cup B = \{x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$
$$= \{x \in A \vee x \in B\}$$

Esempio

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

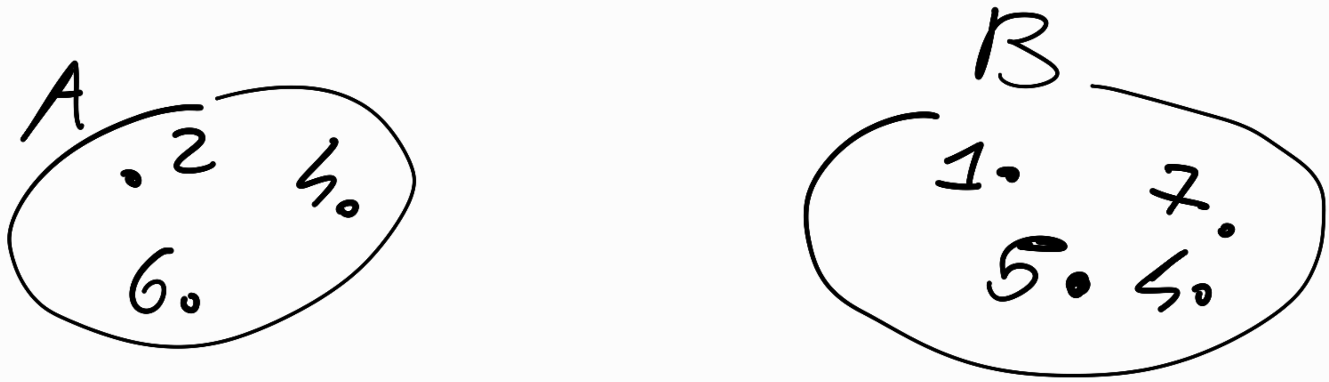
Inclusione

$A \subseteq B$ (senso largo)

$A \subset B$ (senso stretto)

Unione

$A \cup B = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

Intersezione

$A \cap B$ (A intersecato B)

$$A \cap B = \{x \in A \text{ e } x \in B\}$$
$$= \{x \in A \wedge x \in B\}$$

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 4, 5, 7\}$

$A \cap B = \{4\}$

$|A \cap B| = 1$

Ponendo $S = A \cap B$, $|S| = 1$, S è un singoletto, ovvero contiene un unico elemento.

$A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = A = \{2, 4, 6\}$.

Differenza insiemistica

A, B insiemi numerici

$A \setminus B$ è l'insieme che contiene tutti gli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B.

$B \setminus A$ è l'insieme che contiene tutti gli elementi che appartengono a B ma non appartengono ad A.

Esempio

$A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 4, 5, 7\}$

$$A \setminus B = A - (A \cap B) = \{2, 6\}$$

$$B \setminus A = B - (A \cap B) = \{1, 5, 7\}$$

Insiemi numerici

1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (insieme dei numeri naturali)

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

2) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(insieme dei numeri interi)

3) $\mathbb{Q} = \{ q = \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

(insieme dei numeri razionali) $\sqrt{4} = 2$

4) $\mathbb{R} = \{ x : x$ è un numero razionale o irrazionale $\}$

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$ $\sqrt{2}$

Rappresentazione grafica degli elementi (numeri) dell'insieme $\mathbb{R}$.