SIS Scuola Interdipartimentale delle Scienze, dell'Ingegneria e della Salute

DiST Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

ACS parte 2: ACS_14a

Argomenti trattati

- Cenni a Fourier 2D (DFT, FS, FT).
- Cenni alle proprietà di FT 2D.

DFT 2D e IDFT 2D

DEFINIZIONE

Sia $\mathbf{f}$ una matrice $M\times N$ $\mathbf{f}=(\mathbf{f}_{h,k})\in\mathbb{C}^{M\times N}$: la **Trasformata di Fourier Discreta 2D di f** è la matrice $\mathbf{F}\in\mathbb{C}^{M\times N}$ i cui elementi sono:

$$\mathbf{F}_{u,v}=\sum_{h=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{f}_{h,k}\,e^{-2\pi i\left(\frac{uh}{M}+\frac{vk}{N}\right)},\quad u=0,1,\dots,M-1,\ v=0,1,\dots,N-1$$

e, viceversa, la **Trasformata di Fourier Discreta Inversa 2D di F** è la matrice $\mathbf{f}$ i cui elementi sono:

$$\mathbf{f}_{h,k}=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\mathbf{F}_{u,v}\,e^{+2\pi i\left(\frac{uh}{M}+\frac{vk}{N}\right)},\quad h=0,1,\dots,M-1,\ \ k=0,1,\dots,N-1$$

in *MATLAB*: `fft2()`, `ifft2()` e `fftshift()`

Trasformata di Fourier Discreta 2D

$$\mathbf{F}_{u,v} = \sum_{h=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_{h,k}\, e^{-2\pi i\left(\frac{uh}{M}+\frac{vk}{N}\right)}, \qquad u=0,1,\dots,M-1,\ v=0,1,\dots,N-1$$

separa

$$\mathbf{F}_{u,v} = \sum_{h=0}^{M-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi i}{N} vk}\right] e^{-\frac{2\pi i}{M} uh}, \qquad u=0,1,\dots,M-1,\ v=0,1,\dots,N-1$$

Φ_v

per ogni h, è una **DFT** ...

Una **DFT 2D** può essere calcolata mediante più **DFT 1D**, ciascuna calcolata lungo una dimensione.

Una **DFT 2D** (`fft2()` in MATLAB) può essere espressa mediante più **DFT 1D**, ciascuna calcolata lungo una dimensione.

Esempio: $M=2$, $N=3$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1 3 DFT(M=2) lungo le colonne — **2** 2 DFT(N=3) lungo le righe

```
f=[1 2 3;4 5 6]; disp( fft( fft(f) .') .')
   21 + 0i              -3 + 1.7321i         -3 - 1.7321i
   -9 + 0i               0 +      0i          0 +      0i
```

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1 2 DFT(N=3) lungo le righe — **2** 3 DFT(M=2) lungo le colonne

```
f=[1 2 3;4 5 6]; disp( fft( fft(f.') .') )
   21 + 0i              -3 + 1.7321i         -3 - 1.7321i
   -9 + 0i               0 +      0i          0 +      0i
```

```
f=[1 2 3;4 5 6];  disp(fft2(f))
   21 + 0i              -3 + 1.7321i         -3 - 1.7321i
   -9 + 0i               0 +      0i          0 +      0i
```

Esercizio

Dalla forma scalare di una **DFT 2D** spiegare perché la si può ottenere anche come segue:

```
f=[1 2 3;4 5 6];  disp(fft2(f))
  21.0000 + 0.0000i  -3.0000 + 1.7321i  -3.0000 - 1.7321i
  -9.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
[M,N]=size(f);
wM=exp(-2i*pi/M); k=0:M-1; WM=wM.^(k'*k);
wN=exp(-2i*pi/N);  k=0:N-1; WN=wN.^(k'*k);
WM * f * WN
ans =
  21.0000 + 0.0000i  -3.0000 + 1.7321i  -3.0000 - 1.7321i
  -9.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
```

WM * f * WN — forma matriciale della **DFT 2D**

$$\Omega_M = \left(\omega_M^{kj}\right)_{k,j=0,1,\ldots,M-1}, \quad \omega_M = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$$

$$\Omega_N = \left(\omega_N^{kj}\right)_{k,j=0,1,\ldots,N-1}, \quad \omega_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_M \cdot \mathbf{f} \cdot \Omega_N$$

Trasformata di Fourier 2D (2D FT)

Quando gli integrali esistono, la **FT 2D** è definita come

$$F(\omega_x,\omega_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-i(x\omega_x+y\omega_y)}dxdy$$

ω_x, ω_y are angular frequencies

$$F(\nu_x,\nu_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-2\pi i(x\nu_x+y\nu_y)}dxdy$$

ν_x, ν_y are angular frequencies

La **Trasformata di Fourier Inversa 2D** (**2D IFT**) è definita come

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_x,\omega_y)e^{+i(x\omega_x+y\omega_y)}d\omega_x d\omega_y$$

ω_x, ω_y are angular frequencies

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x,\nu_y)e^{+2\pi i(x\nu_x+y\nu_y)}d\nu_x d\nu_y$$

ν_x, ν_y are angular frequencies

Come una **DFT 2D**, una **FT 2D** può esprimersi come combinazione di due **FT 1D**:

$$F_x(\omega_x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-i\omega_x x}dx$$

$$\Downarrow$$

$$F(\omega_x,\omega_y)=\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega_x,y)e^{-i\omega_y y}dy$$

rispetto a frequenza angolare ω

$$F_x(\nu_x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-2\pi i x\nu_x}dx$$

$$\Downarrow$$

$$F(\nu_x,\nu_y)=\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\nu_x,y)e^{-2\pi i y\nu_y}dy$$

rist. the circular frequency ν

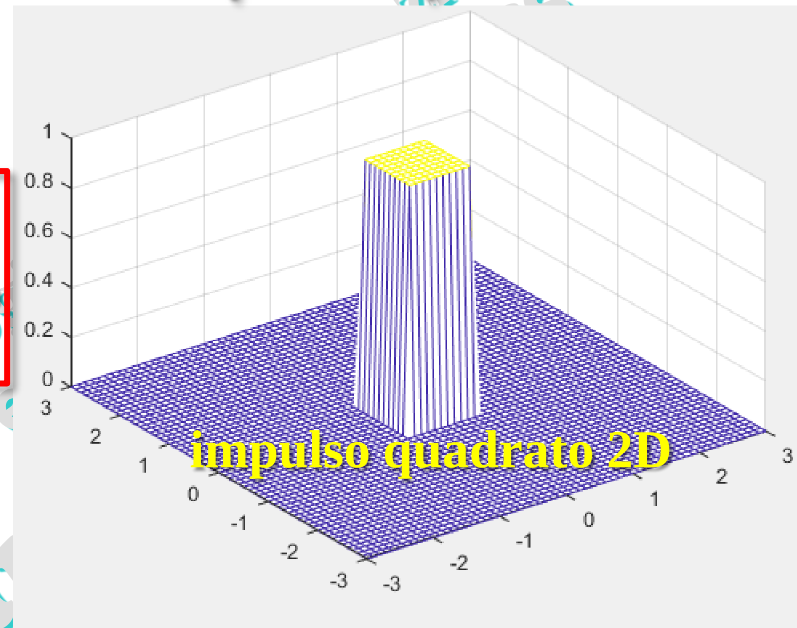
Tutte le proprietà della **FT 1D** si applicano alla **FT 2D**

Esempio di FT 2D: 2D square pulse

```
T=6; N=60;
[x,y]=meshgrid(linspace(-T/2,T/2,N+1));
f=zeros(size(x));
L=0.5;[h,k]=find(abs(x)<L & abs(y)<L);
f(h,k)=ones(size(f(h,k))); mesh(x,y,f)
```

uguali

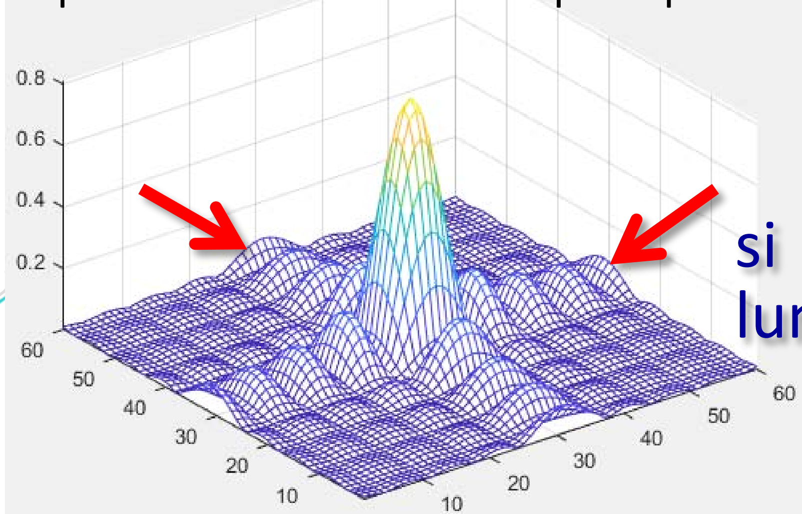
```
f=rectpuls(x,2*L).*rectpuls(y,2*L);
mesh(x,y,f); axis tight
```



f è il prodotto di due funzioni **rect pulse**

⇒ La **FT 2D** di **f** è il prodotto di convoluzione di 2 funzioni **sinc**

Spettro di Fourier di "2D square pulse"



codice non efficiente!

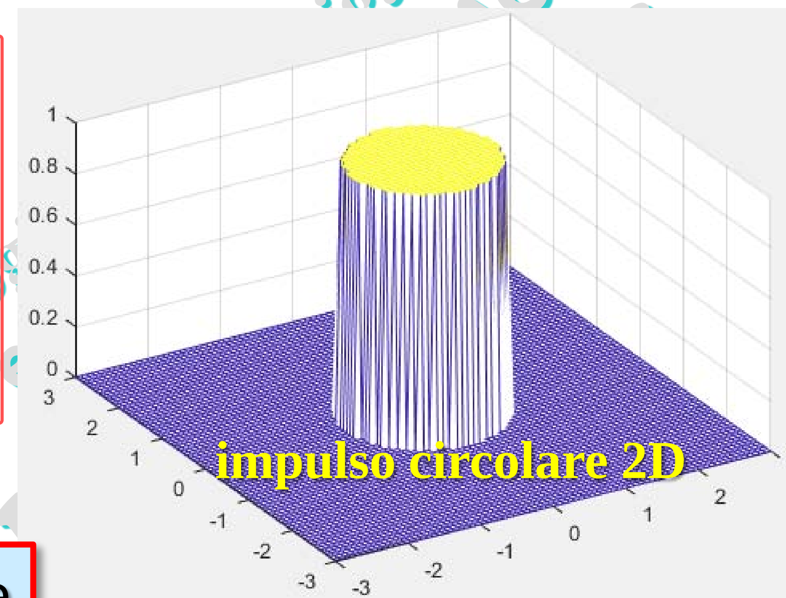
```
fn=f(1:end-1,1:end-1);
[h,k]=meshgrid(0:N-1, 0:N-1);
F=fftshift(fft2(fn)).*(-1).^(h+k)*(T/N)^2;
mesh(abs(F)); axis tight
```

si vedono 2 **sinc**: ciascuna lungo la direzione di un asse

Esercizio: Ripetere, in MATLAB, per un 2D rectangular pulse.

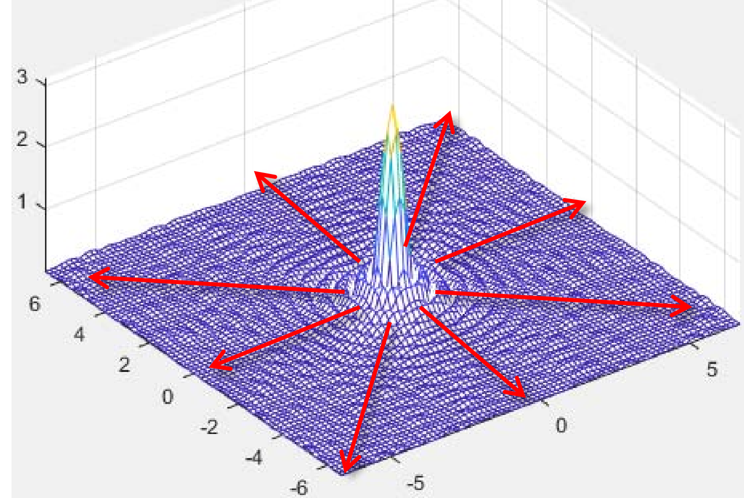
Esempio di FT 2D: 2D circ pulse

```
T=6; N=80;
[x,y]=meshgrid(linspace(-T/2,T/2,N)); z=x+i*y;
k=find(abs(z)<1);
f=zeros(size(z)); f(k)=ones(size(k));
mesh(x,y,f); axis tight
[h,k]=meshgrid(0:N-1, 0:N-1);
F=fftshift(fft2(f)).*(-1).^(h+k)*(T/N)^2;
mesh(abs(F)); axis tight
```



Esercizio: scrivere un codice migliore

Spettro di Fourier di “2D circ pulse”



si vedono infinite funzioni **sinc** lungo una qualsiasi direzione nel piano orizzontale

Esempio di FT 2D: gaussiana 2D $F(\omega_x,\omega_y)=e^{-\frac{\omega_x^2+\omega_y^2}{4\pi}}$

$$F_x(\omega_x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,e^{-2\pi i x\omega_x}\,dx \;\Rightarrow\; F(\omega_x,\omega_y)=\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega_x,y)\,e^{-2\pi i y\omega_y}\,dy$$

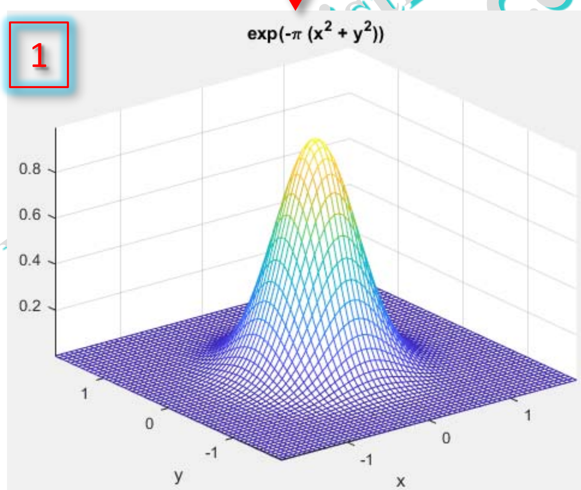
↑ **FT 1D di** gaussiana ↑ **FT 1D di** gaussiana

La **FT di una gaussiana 2D** è ancora una gaussiana, ottenuta componendo le **FT** delle due gaussiane 1D.

simbolico

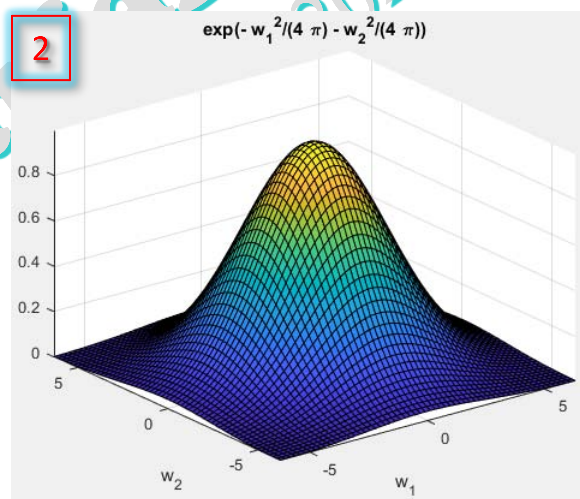
```
syms x y w1 w2 real; f=exp(-pi*(x^2+y^2)); ezmesh(f)   1
F1=fourier(f,x,w1);  F=fourier(F1,y,w2);   ezsurf(F)   2
syms v1 v2 real; Fv=subs(F,{w1,w2},{2*pi*v1,2*pi*v2}); Fv=simplify(Fv);
ezsurf(Fv)   3
```

1



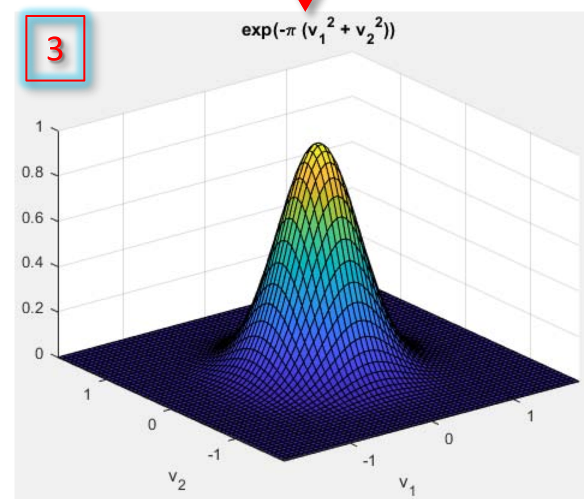
$f(x,y)$

2



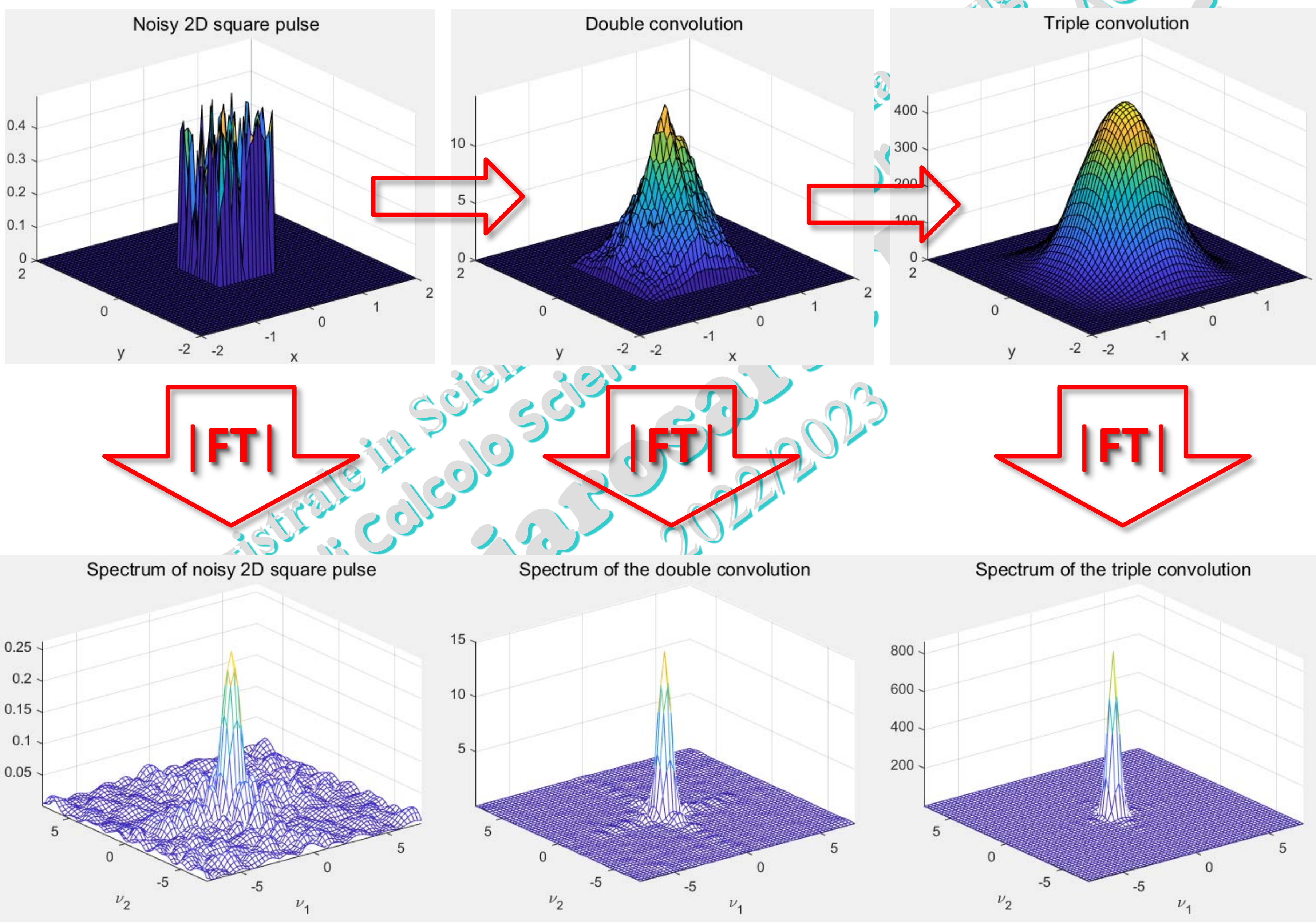
$F(\omega_1,\omega_2)$ risp. alle frequenze angolari

3



$F(\nu_1,\nu_2)$ risp. alle frequenze circolari

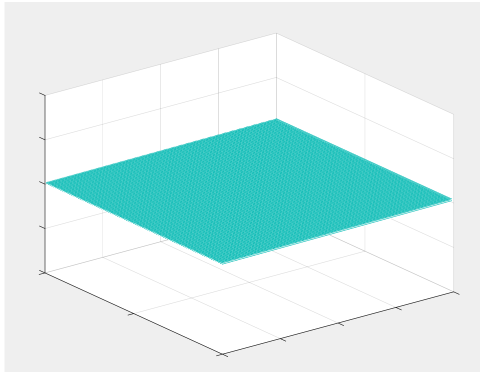
Esempio: convoluzione 2D (conv2())



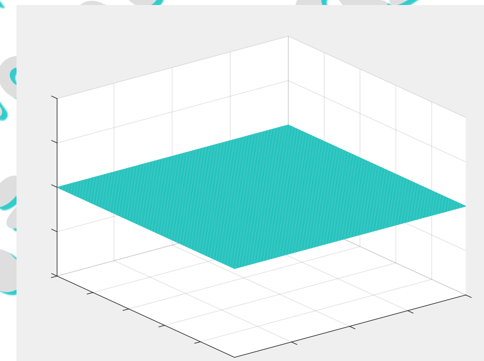
Esempi di alcune FT 2D

La FT della funzione nulla è la funzione nulla

```
Z=zeros(100,200);
FZ=fftshift(fft2(Z));
figure; mesh(Z)
title('zero matrix')
figure; mesh(abs(FZ))
title('FT of zeros')
```

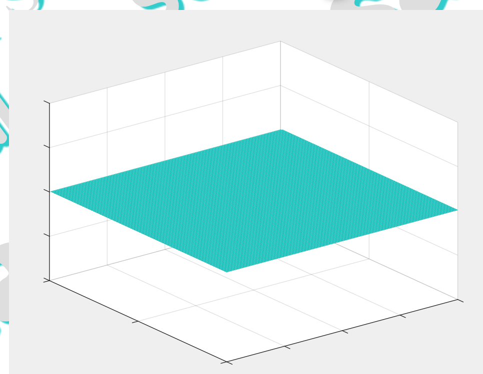


|FT|

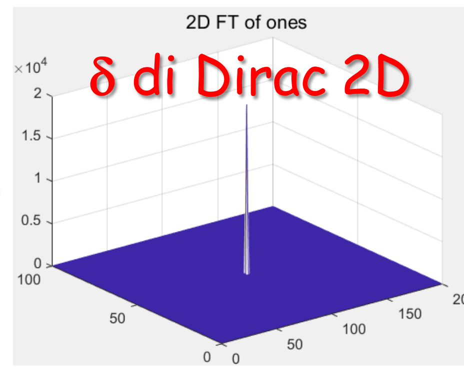


La FT della funzione costante uguale a 1 è una delta di Dirac

```
O=ones(100,200);
FO=fftshift(fft2(O));
figure; mesh(O)
title('matrix of ones')
figure; mesh(abs(FO))
title('FT of ones')
```

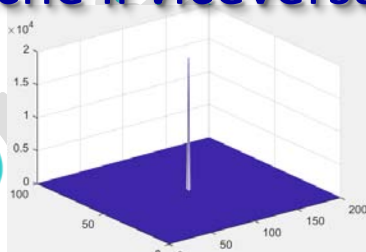


|FT|

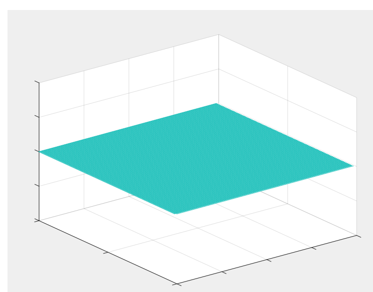


δ di Dirac 2D

Vale anche il viceversa



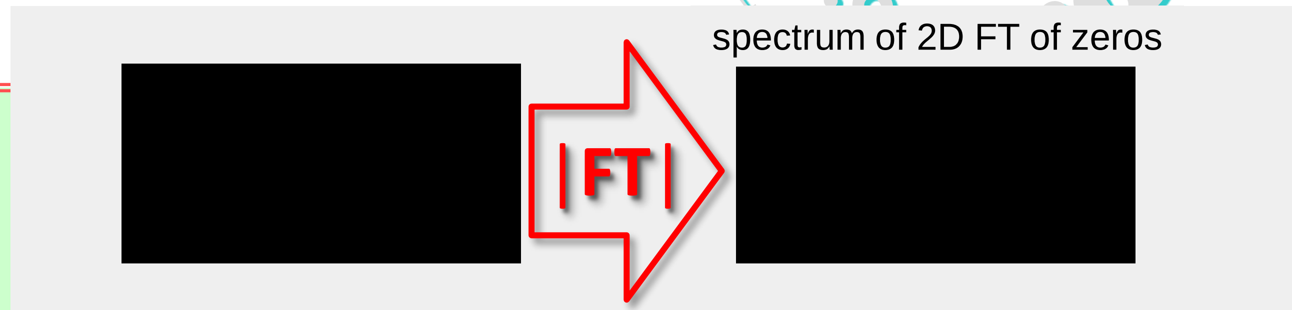
|IFT|



```
O=ones(100,200);
iFO=fftshift(ifft2(O));
figure; mesh(iFO)
title('matrix of ones')
figure; mesh(abs(iFO))
title('IFT of ones')
```

… dal punto di vista dell'immagine [RGB]

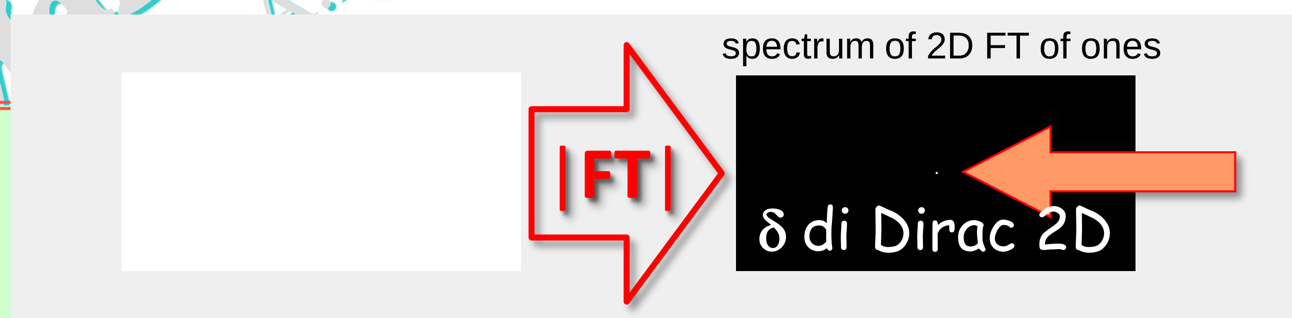
La **FT** della funzione nulla è la funzione nulla




```
Z=zeros(100,200);
FZ=fftshift(fft2(Z));
figure; imshow(Z)
title('zero matrix')
figure; imshow(abs(FZ))
title('spectrum of 2D FT of zeros')
```

in MATLAB [RGB] 0 corrisponde al nero e 1 corrisponde al bianco

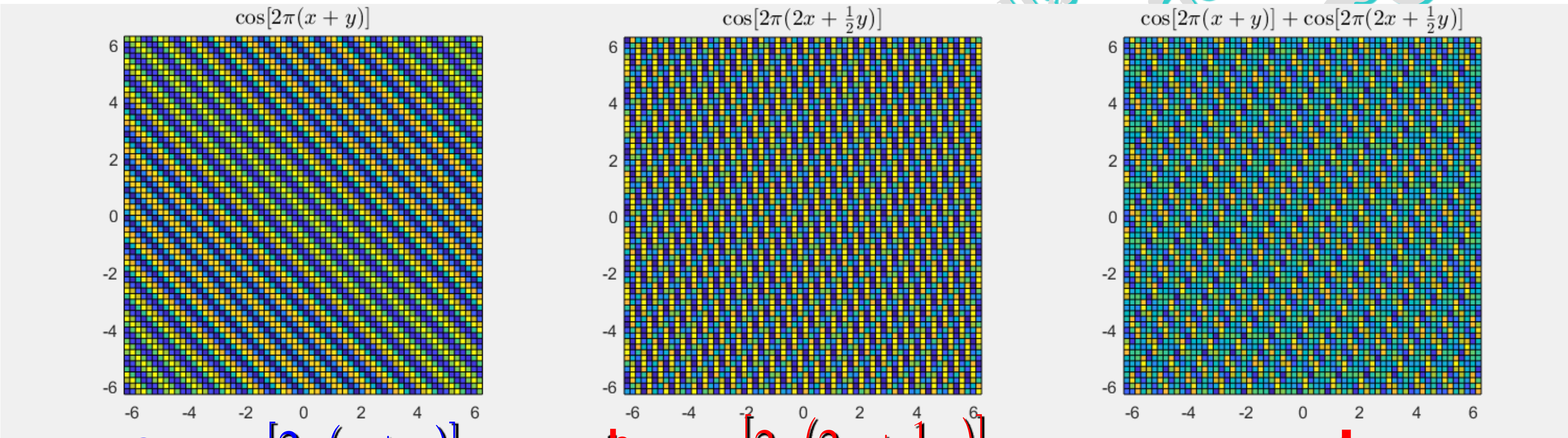
la **FT** della funzione costante uguale a 1 è una delta di Dirac




```
O=ones(100,200);
FO=fftshift(fft2(O));
figure; imshow(O)
title('matrix of ones')
figure; imshow(abs(FO))
title('spectrum of 2D FT of ones')
```

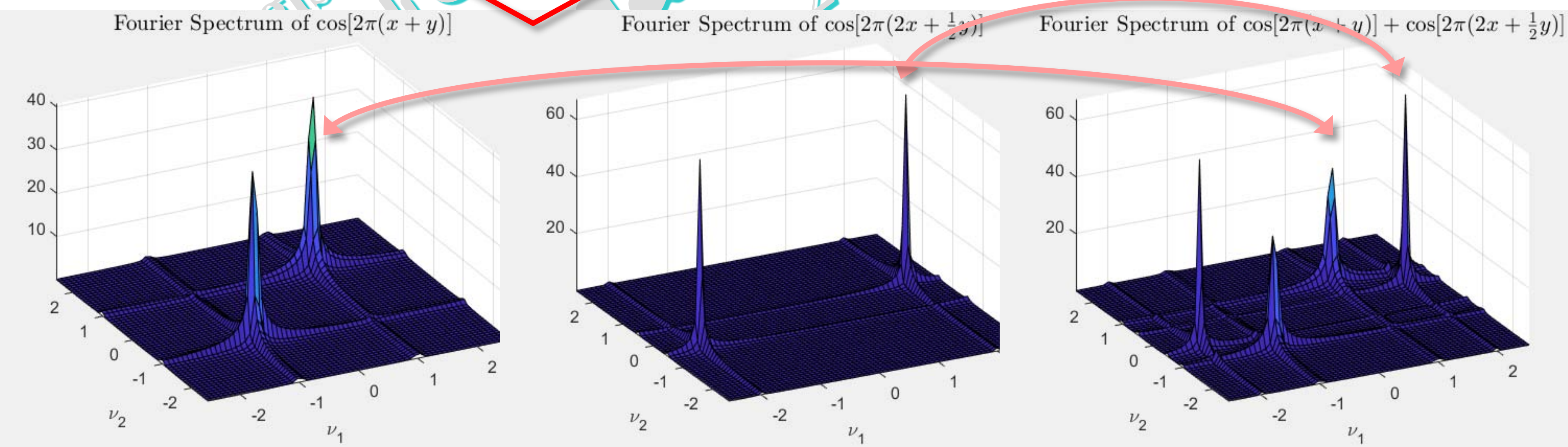
Esempi di alcune FT 2D

la **FT 2D** di funzioni trigonometriche consiste di 2 delta di Dirac simmetriche



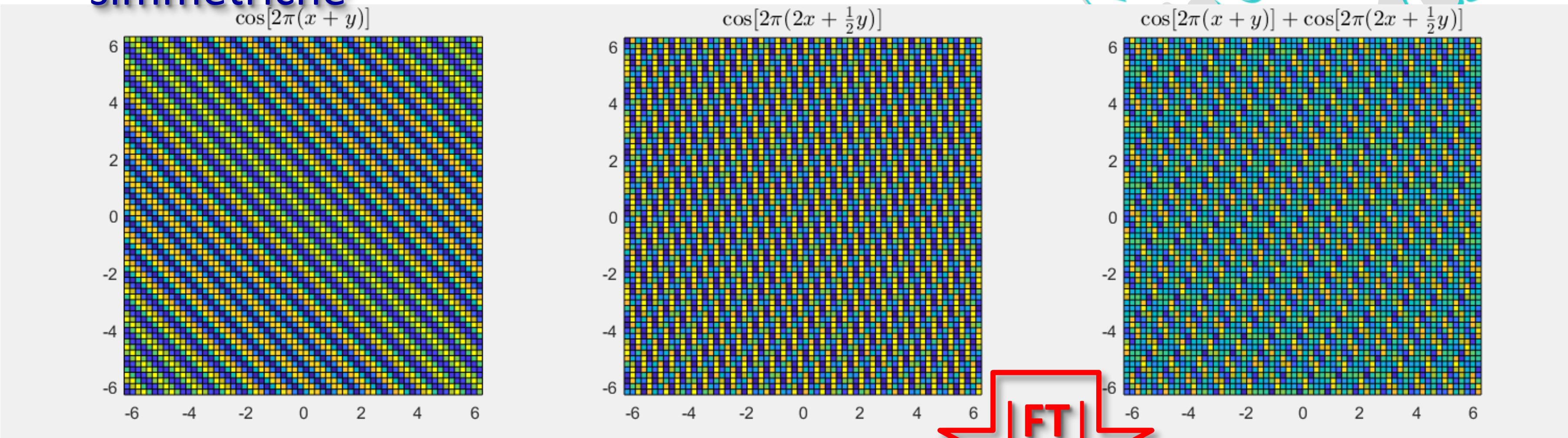
$\mathbf{a} = \cos\left[2\pi\left(x+y\right)\right]$ $\mathbf{b} = \cos\left[2\pi\left(2x+\frac{1}{2}y\right)\right]$ **a+b**

|FT|



Esempi di alcune FT 2D

La **FT 2D** di funzioni trigonometriche consiste di 2 delta di Dirac simmetriche



|FT|

$\mathbf{a} = \cos[2\pi(x+y)]$ $\mathbf{b} = \cos\left[2\pi\left(2x+\frac{1}{2}y\right)\right]$ **a+b**

cos(2πν): funzione periodica di frequenza circolare **ν**